VIVERE UNA FUNZIONE

Elisabetta OSSANNA[1], Sara BONORA[2]

[1]*Dipartimento di Matematica - Università degli Studi di Trento, Trento (TN)*
[2]*Corso di Laurea Magistrale in Matematica - Università degli Studi di Trento, Trento (TN)*

Riassunto

Minimizziamo il costo di realizzazione di una rete per la fibra ottica. Tramite la presentazione di un semplice problema si materializza così una funzione, si mette in luce la relazione tra la variabile dipendente ed indipendente, si concretizza il suo grafico srotolando la rete e si stima il minimo per approssimazioni successive. Manipolazione e tecnologia si alternano per raggiungere l'obiettivo.

Introduzione

Questo lavoro si ispira al problema di Steiner riferito a tre città poste ai vertici di un triangolo equilatero e cerca di mettere in particolare luce alcuni aspetti legati al linguaggio delle funzioni, dal concetto stesso alla rappresentazione grafica. Il laboratorio è stato sviluppato come progetto sperimentale all'interno del corso *"Tecniche di laboratorio per la didattica della matematica"* del corso di laurea magistrale in Matematica dell'Università di Trento da Angela Carlin, Joannes Pfaender, Marta Stach insieme alle autrici, che per la sua realizzazione si sono appoggiati al laboratorio DiCoMat[1]. Per la parte che riguarda la verifica sperimentale con le lamine saponate si è fatto riferimento alla sezione "Reti minime" del quaderno di laboratorio "Problemi di massimo e di minimo" [Luminati-Tamanini, 2009]. La sperimentazione si è realizzata in una classe prima della Scuola Secondaria di Secondo Grado.

Un pannello con occhioli in cui far scorrere uno spago permette di rappresentare fisicamente il problema in oggetto e di sperimentare in modo dinamico una funzione (si veda fig. 3). Infatti la lunghezza della rete dipende da un punto che varia nella parte di piano considerata (si veda fig. 1). Il problema crea l'occasione per fare ipotesi, cercando un filo conduttore che porti ad una ragionevole congettura, che andrà poi testata e verificata attraverso strategie di diverso tipo. La natura del problema e gli strumenti a disposizione portano a cercare una descrizione degli elementi in gioco che permetta una facile e ragionevole comparazione. Questo può avvenire sfruttando la corda come strumento di misura e come mezzo fisico per la visualizzazione. L'ambiente più adatto per la comparazione è quello del piano cartesiano che viene ricreato in modo fisico e semplificato sul pavimento. Si crea così l'occasione per sperimentare e mettere le basi del concetto di grafico di una funzione. L'inadeguatezza delle misure sperimentali farà nascere l'esigenza di indagare il problema attraverso supporti digitali (foglio di calcolo), che vengono utilizzati per guidare gli studenti verso una modellizzazione algebrica del problema. In conclusione un esperimento che sfrutta le lamine di sapone permette agli studenti di verificare le loro congetture e i risultati sviluppati nell'arco dell'attività.

[1] http://r.unitn.it/it/maths/dicomatlab

Il problema e la congettura

Nella prima fase del laboratorio presentiamo il problema in una cornice narrativa: tre città, che si trovano ai vertici di un triangolo equilatero, devono essere collegate tramite una rete a fibra ottica, minimizzando la lunghezza della rete di collegamento.

In questa fase gli studenti sono suddivisi a piccoli gruppi e hanno a disposizione un pannello di compensato con degli occhioli ai vertici di un triangolo equilatero, il cui lato è lungo 50 cm, e i cui vertici corrispondono alle tre città (si veda fig. 3). Utilizzando lo spago, che rappresenta la fibra, gli studenti possono quindi sperimentare praticamente diverse configurazioni della rete. L'indagine sul problema è quindi mediata dallo strumento.

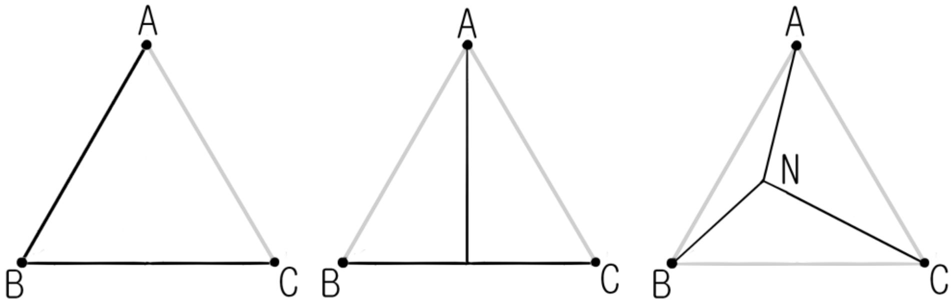

Figura 1 -Esempi di configurazioni sul nostro sistema

In riferimento alla figura 1, chiameremo configurazione a "V" quella in cui la rete corrisponde all'unione di due lati del triangolo, configurazione a "T" quella in cui la rete corrisponde all'altezza del triangolo unita al lato corrispondente e configurazione ad "Y", quella in cui è stato aggiunto un punto di diramazione N, che chiameremo nodo centrale, all'interno del triangolo. Per superare la rigidità delle prime configurazioni risulta utile spingere gli studenti a sfruttare appieno le potenzialità dello strumento a disposizione. Sperimentare configurazioni differenti e fare considerazioni pratiche sulle lunghezze dei vari archi risulta più facile avendo a disposizione dello spago da poter tagliare, annodare e confrontare. Come esempio mostriamo in figura 2 un possibile utilizzo dello strumento per giustificare il fatto che la configurazione a "T" è migliore di quella a "V". Un nuovo pezzo di spago (in rosso in figura 2), dinamicamente inserito nella configurazione a "V", permette di apprezzare il miglioramento in termini di lunghezza della diverse reti che si vengono a formare.

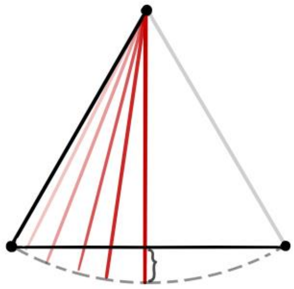

Figura 2 – Confronto dinamico di più reti

Chiediamo agli studenti di ordinare le loro ipotesi di reti, da quella con lunghezza maggiore a quella con lunghezza minore. Ogni gruppo dovrà poi disegnare le proprie ipotesi su cartoncini, che riportano i vertici del triangolo, per poi appenderli alla parete in ordine decrescente. Vogliamo creare così un momento di confronto tra i gruppi e mantenere traccia delle congetture iniziali durante le fasi successive. Lasciamo decidere all'insegnante se sia più efficace per gli studenti ottenere le lunghezze tramite misurazione diretta (figura 3), oppure sfruttando le diseguaglianze date dalla geometria dei triangoli.

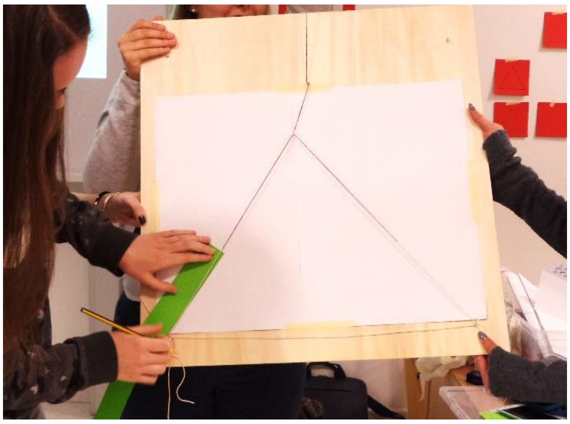

Figura 3 – Il pannello per simulare le reti.

Invitiamo in seguito gli studenti a operare dinamicamente per osservare come la lunghezza della rete vari con continuità all'interno delle due configurazioni "T" e "V", che possiamo considerare come casi limite di configurazioni di tipo "Y". Resta quindi il problema di definire una o più proprietà sulla configurazione ad "Y" per poter iniziare a limitare ulteriormente l'insieme delle reti tra cui cercare la soluzione del nostro problema.

Vogliamo portare gli studenti a considerare il fatto che, fissata la distanza tra il nodo N e il lato BC, la configurazione con lunghezza minore è quella per cui N giace sull'asse di BC. Questo può essere fatto riprendendo il problema sui triangoli equiestesi applicandolo a questo caso specifico. Ispirandoci a Emma Castelnuovo [Castelnuovo, riedizione 2017] prendiamo un'asta metallica con un anello, due elastici di egual misura fissati agli occhioli e all'anello (fig. 4). Portiamo gli studenti a osservare come, tenendo l'asta parallela a BC e mettendo in tensione gli elastici, in qualunque posizione noi poniamo l'anello, al momento del rilascio esso tornerà sempre in posizione centrale, formando con gli elastici un triangolo isoscele (fig. 4).

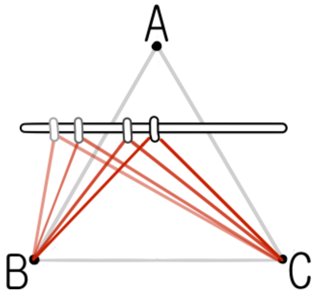

Figura 4 - Sistema con gli elastici

Attraverso una discussione matematica guidata dall’insegnante gli studenti arrivano alla descrizione della caratteristica delle reti da prendere in considerazione: il nodo centrale N giace sull’asse del segmento BC.

La funzione “lunghezza della rete”

Vogliamo ora creare un contesto adatto ad introdurre la funzione oggetto del nostro laboratorio: la funzione “lunghezza della rete”, ristretta all’asse del segmento BC. L’approccio, ovviamente, non sarà formale, ma pratico, e sarà volto a costruire significati relativi al concetto di funzione e alle sue rappresentazioni. Vogliamo che l’idea di funzione si alimenti dell’esperienza concreta che avviene lavorando con il materiale a disposizione.

Innanzitutto abbiamo bisogno di descrivere con precisione la posizione del nodo centrale N. Per fare questo posizioniamo un metro da sarto sull’asse del triangolo in modo da identificare la posizione di N attraverso la sua quota (fig. 5). Gli studenti possono sperimentare la corrispondenza tra il punto N e la rete che si crea, e di conseguenza la sua lunghezza. Questo momento è importante per cogliere la relazione di dipendenza funzionale tra la lunghezza della rete e la quota della posizione di N. In pratica si sperimenta che la lunghezza della rete varia e il suo variare dipende dalla posizione di N.
In particolare, passando dalla configurazione a “T” a una a “Y” con gradualità, la lunghezza della rete varia “con continuità” e inizialmente diminuisce. Quando il nodo è vicino all’altra posizione limite, cioè la configurazione a “V”, la lunghezza cresce fino ad arrivare a una lunghezza superiore rispetto alla configurazione iniziale a “T”. Si può quindi intuire che ci sia una posizione di minimo per il nostro sistema. Questo tipo di ragionamento ricalca le proposte di Emma Castelnuovo in vari problemi presentati in “Didattica della matematica” [Castelnuovo, riedizione 2017].

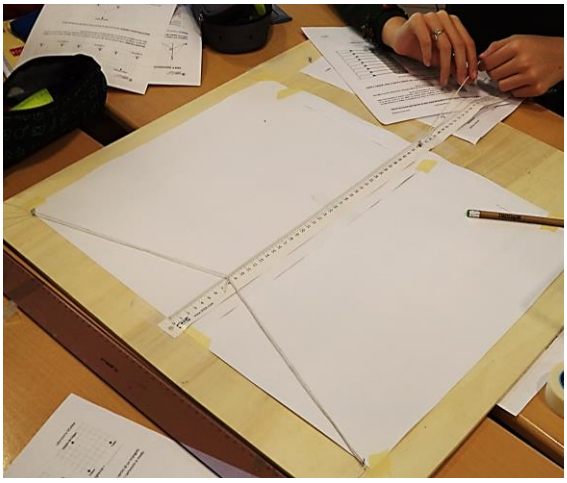

Figura 5 - Il metro fissato sull’asse del triangolo

Per proseguire nella risoluzione del problema iniziale dobbiamo essere in grado di confrontare la lunghezza delle reti ottenute. Per indurre a operare un confronto diretto, gli studenti operano senza metro e uniscono gli archi della rete, ottenendo un unico pezzo. La rete viene così “riassemblata” in un unico segmento in modo che, pur restando su un piano materiale, sia più facile operare un confronto tra le lunghezze. Il confronto risulta però inutile, se non si tiene traccia della posizione del nodo N. Per questo predisponiamo sul pavimento un metro da sarto e un pezzo di nastro adesivo colorato perpendicolare a esso, in modo tale da creare idealmente gli assi di un piano cartesiano.

Figura 6 - Gli studenti al lavoro con le "reti riassemblate"

Gli studenti possono ora "srotolare" sul pavimento il pezzo di spago colorato che corrisponde alla rete "riassemblata", avendo cura di posizionare un estremo del pezzo di spago sul metro da sarto in corrispondenza della quota in cui si trovava il nodo centrale della rete che stanno riproducendo (fig.6). Ciò che costruiscono in questo modo serve a raffigurare fisicamente la variazione della rete: davanti a loro vi è la rappresentazione di quanto ipotizzato e osservato attraverso il sistema dinamico costruito. Osserviamo che, se avessimo fatto misurare direttamente le reti, non ci sarebbe stata la necessità del confronto realizzato fisicamente, che è però fondamentale in quanto ci porta alla rappresentazione della funzione tramite spaghi colorati, che altro non sono se non le ordinate del grafico.

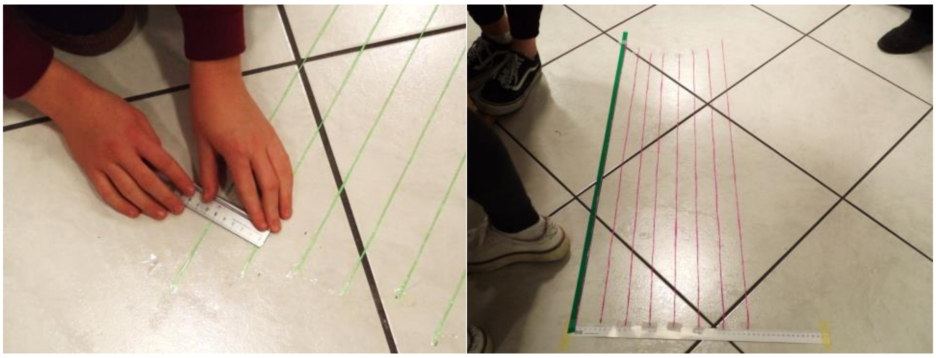

Figura 7 – La lunghezza della rete "si srotola" nel piano cartesiano

Per questo lavoro abbiamo suggerito posizioni equidistanti (fig. 7), ma si potrebbe lasciar scegliere agli studenti le posizioni. L'unico rischio è che indaghino posizioni molto vicine al baricentro, nel qual caso le variazioni della lunghezza non sono apprezzabili con questa modalità sperimentale. L'indagine libera potrebbe arricchire la discussione, ma richiede un investimento di tempo ed energie che solo l'insegnante può valutare a seconda del contesto.

Per arricchire ulteriormente l’esperienza e la discussione, possiamo rappresentare la nostra funzione tramite una tabella e tramite la sua rappresentazione grafica. Per questo gli studenti misurano i pezzi di spago e inseriscono nello schema loro fornito le rispettive misure (fig. 8).

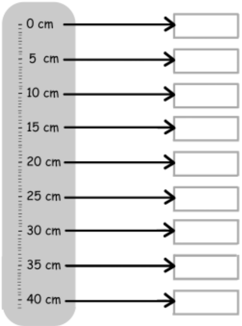

Figura 8 - Lo schema presentato nelle schede di lavoro

Possiamo qui osservare come lo schema dato non sia una tradizionale tabella a doppia entrata, ma riproduca il modello concreto del pannello e del pavimento, per traghettare lo studente dall’esperienza concreta alla rappresentazione grafica della funzione. Infine chiediamo di inserire in un piano cartesiano i punti che corrispondono all’estremo dello spago che non giace sul metro (fig. 9). Abbiamo così portato gli studenti a rappresentare la nostra funzione tramite i punti “più alti” dei segmenti che rappresentano le varie reti ("quota di N"-"lunghezza della rete di nodo centrale N"), cioè i punti del grafico, creando l’occasione per una discussione sul significato di quei punti e sulle informazioni che ci possono dare relativamente alla funzione che stiamo studiando.

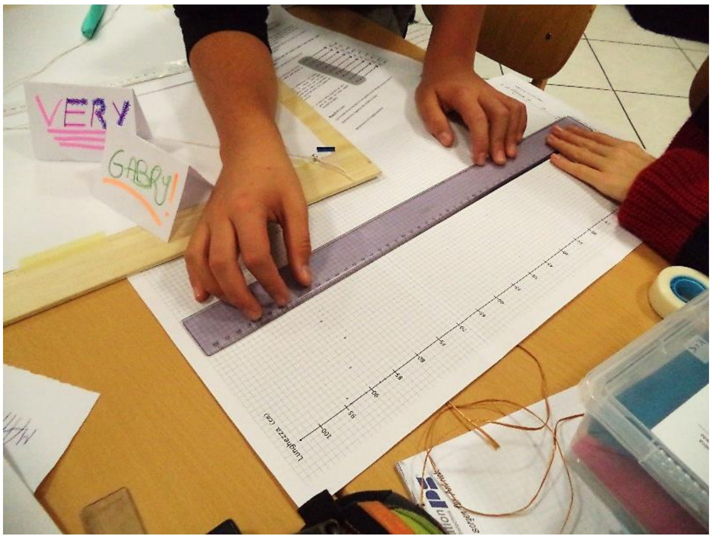

Figura 9 – Rappresentazione dei punti del grafico

Per esempio, chiedere come si è giunti a disegnare un particolare punto, porta lo studente a ripercorrere a ritroso il cammino che lo ha portato lì. Questo può contribuire alla costruzione del significato di grafico di una funzione.

L’osservazione delle rappresentazioni che abbiamo sul pavimento, realizzate dai vari gruppi, diventa un’interessante guida per una discussione che tocchi i due aspetti seguenti.

a) L’andamento della funzione “lunghezza della rete di nodo N” è coerente con le osservazioni iniziali (casi limite, crescenza – decrescenza), come si vede in figura 10.

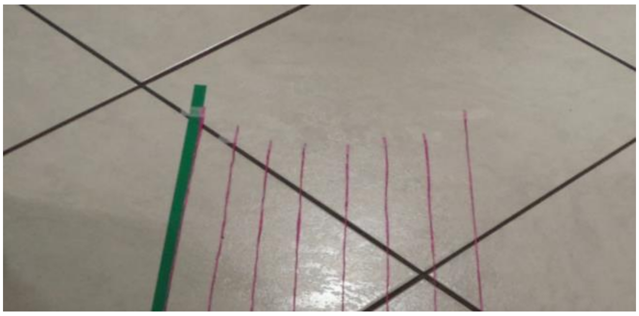

Figura 10 – L’andamento

b) In alcune rappresentazioni si trovano delle incongruenze rispetto alle ipotesi iniziali, dovute a errori di misura e all'imprecisione del metodo utilizzato. Per esempio, gruppi diversi ottengono misure diverse di reti uguali; oppure reti con nodi vicini non presentano apprezzabili differenze nelle loro lunghezze (fig. 11).

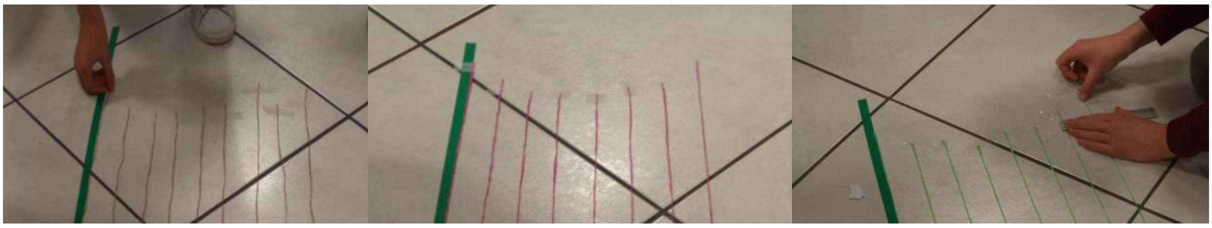

Figura 11 - Un confronto

Serve quindi un metodo più affidabile per calcolare la lunghezza della nostra rete. Gli studenti sono spinti ad utilizzare il ragionamento geometrico e il problema viene affrontato utilizzando il teorema di Pitagora, almeno per alcune posizioni del nodo per cui l’osservazione precedente aveva fatto emergere delle incongruenze. Questo permette anche di attivare negli studenti competenze metacognitive, in quanto sono spinti a controllare il proprio lavoro in funzione delle osservazioni relative alle misure. A questo punto, pur avendo le misure precise della lunghezza della rete in alcuni punti, cercheremo di avviare una discussione finalizzata a migliorare la ricerca della posizione del nodo che identifica la lunghezza minima. Ricordiamo che nella fase di indagine iniziale abbiamo ipotizzato che la lunghezza della rete variasse con continuità. Dopo questa fase di discussione collettiva l'obiettivo è individuare un *"intervallo sospetto"* entro cui possa stare il valore della quota di N. Questo intervallo avrà come estremi il punto a sinistra e quello a destra del punto trovato come minimo tra quelli calcolati.

Un ragionamento spontaneo di alcuni studenti potrebbe essere quello di cercare il valore minimo tra quelli misurati da loro, ossia pensare che il punto minore tra quelli misurati sia il minore possibile tra tutti i valori, anche quelli non calcolati o misurati, come rappresentato nel grafico 1 di figura 12. Per questo è utile stimolare una discussione, supportata da esempi e controesempi, che porti gli studenti a valutare schemi del tipo 2 e 3 in figura 12.

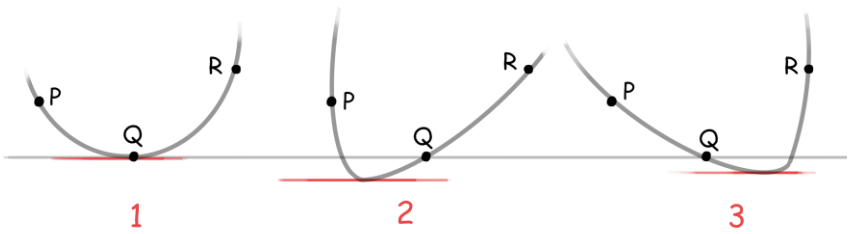

Figura 12 -

Raffiniamo il calcolo della lunghezza e andiamo verso il minimo

Avendo ristretto l'intervallo di indagine, si rende necessario rifare il calcolo della lunghezza delle reti valutando nodi sempre più vicini. Si può pensare di chiedere agli studenti di fare alcuni calcoli con la calcolatrice, mostrando loro come diventi un processo lungo e ripetitivo. Per ovviare a ciò proponiamo l'utilizzo di un foglio di calcolo impostando il lavoro come in figura 13.

Quota di N	Lunghezza AN	25^2	Quota^2	Lunghezza CN	Lunghezza rete
A2	=43,3-A2	625	=A2^2	=SQRT(C2+D2)	=2*E2+B2
10	33,3	625	100	26,926	87,152
11	32,3	625	121	27,313	86,926
12	31,3	625	144	27,731	86,762
13	30,3	625	169	28,178	86,656
14	29,3	625	196	28,653	86,606
15	28,3	625	225	29,155	86,610
16	27,3	625	256	29,682	86,663
17	26,3	625	289	30,232	86,765
18	25,3	625	324	30,806	86,912
19	24,3	625	361	31,401	87,101
20	23,3	625	400	32,016	87,331

Figura 13 – Lavorando con il foglio di calcolo.

Abbiamo così un'occasione concreta per sperimentare l'effetto degli stessi calcoli su più numeri, dando significato alla variabile che potrebbe essere utilizzata, se si arriva alla modellizzazione algebrica del nostro problema. L'uso delle formule del foglio di calcolo diventa essenziale per reiterare i calcoli, modificare l'incremento tra un valore e il successivo, e in seguito sostituire "il riferimento di cella" con la variabile. Per arrivare alla modellizzazione algebrica è utile provare a sintetizzare i passi in un'unica formula che faccia riferimento alla cella relativa alla quota del nodo centrale N.

Il lavoro con il foglio di calcolo può stimolare gli studenti a gestire attivamente l'indagine, scegliendo opportunamente l'intervallo e l'incremento utile per affinare il calcolo. I valori in gioco sono legati tra loro da una relazione funzionale, e i valori su cui si testa la funzione superano necessariamente l'insieme dei numeri naturali, dato che l'incremento di 1 cm non dà risultati soddisfacenti (fig. 13). Un altro aspetto importante riguarda il fatto che il processo che stiamo seguendo non porta alla soluzione, ma a una sua approssimazione. Lo studente è portato a decidere autonomamente quando l'approssimazione è "sufficientemente buona" per dare una risposta ragionevole al problema, osservando che l'errore può diminuire indefinitamente.

Primo raffinamento

Quota di N	Lunghezza AN	25^2	Quota^2	Lunghezza CN	Lunghezza rete
13	30,3	625	169	28,178	86,656
13,5	29,8	625	182,25	28,412	86,624
14	29,3	625	196	28,653	86,606
14,5	28,8	625	210,25	28,901	86,601
15	28,3	625	225	29,155	86,610

Secondo raffinamento

Quota di N	Lunghezza AN	25^2	Quota^2	Lunghezza CN	Lunghezza rete
14	29,3	625	196	28,653	86,606
14,2	29,1	625	201,64	28,751	86,603
14,4	28,9	625	207,36	28,851	86,601
14,6	28,7	625	213,16	28,951	86,602
14,8	28,5	625	219,04	29,052	86,605
15	28,3	625	225	29,155	86,610

Terzo raffinamento

Quota di N	Lunghezza AN	25^2	Quota^2	Lunghezza CN	Lunghezza rete
14,2	29,1	625	201,64	28,7513	86,6027
14,3	29	625	204,49	28,8009	86,6017
14,4	28,9	625	207,36	28,8506	86,6013
14,5	28,8	625	210,25	28,9007	86,6014
14,6	28,7	625	213,16	28,9510	86,6020

Figura 14 – Raffinamenti del calcolo.

Come si vede dalla figura 14 l'indagine può proseguire riducendo l'errore. Accontentandosi di un errore pari al millimetro, il valore approssimato risulterebbe 14,4 cm, e la soluzione del problema si troverebbe tra 14,3 cm e 14,5 cm. Disegnando sul pannello il valore stimato per la quota del nodo N, si può verificare che corrisponde con buona approssimazione con il baricentro del triangolo (trovato come intersezione di due assi del triangolo).

Conclusione: una prova fisica con le lamine di sapone

A conclusione del laboratorio si può proporre agli studenti una verifica sperimentale della soluzione. Per questa fase facciamo riferimento al lavoro contenuto in "*Problemi di Massimo e di minimo*" [Tamanini – Luminati 2009]. Ciascun gruppo ha a disposizione due lastrine parallele di plexiglas accoppiate con tre pioli posti ai vertici di un triangolo equilatero, una bacinella con acqua saponata e un indicatore di angoli a 120°. Quando si estrae la lastrina immersa nell'acqua saponata, si osserva la formazione di tre lamine che collegano i tre pioli. Quelle che si osservano sono le configurazioni di equilibrio stabile delle lamine, che rendono minima l'area della loro superficie a causa della tensione superficiale che tende a ridurle [Luminati – Tamanini, pag. 14]. Le lamine sono nastri rettangolari di altezza costante e quindi la loro area è proporzionale alla lunghezza delle basi. Quindi l'area minima si ottiene se è minima la lunghezza della rete che congiunge i pioli. Quest'ultima osservazione mette in relazione l'esperimento con il nostro problema: la lamina saponata rappresenta la rete di lunghezza minima che collega i tre vertici di un triangolo equilatero. Utilizzando l'indicatore di angoli, si può osservare che le lamine si incontrano lungo uno spigolo, formando a due a due angoli di 120°.

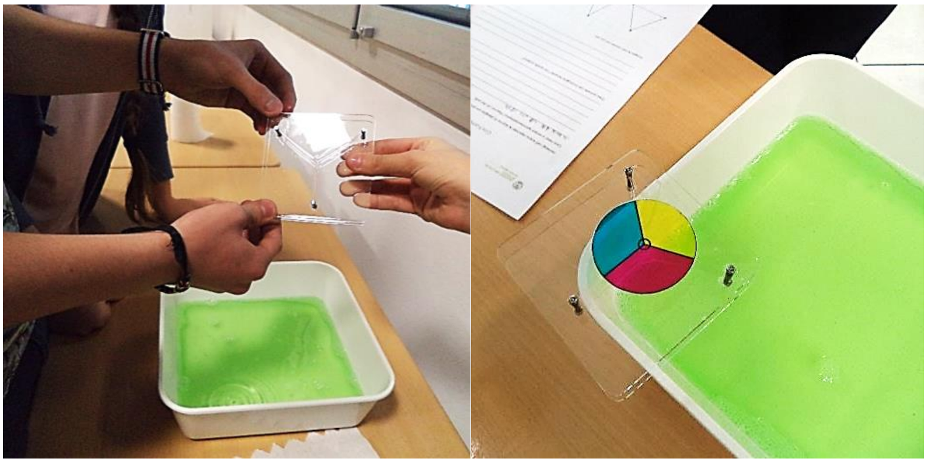

Figura 15 – Lastrine e lamine saponate.

Per concludere gli studenti son invitati a verificare che anche la conformazione trovata con la corda sul pannello forma angoli congruenti tra loro, ovvero di 120°. Portando la corda e il nodo centrale fino a soddisfare questo vincolo, si può verificare se la quota del nodo N sia compatibile con quanto trovato nelle fasi precedenti del percorso (fig. 16). Questo collegamento tra il risultato geometrico trovato con le lamine saponate e l'approssimazione della quota del nodo trovata precedentemente non è risultato di immediata realizzazione per gli studenti.

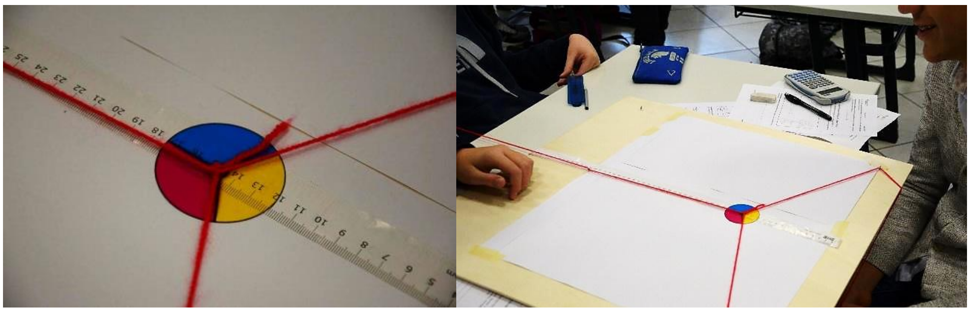

Figura 16 – Il punto di vista degli angoli sul pannello.

Le lastrine con pioli disposti diversamente (fig. 17) permettono di osservare sperimentalmente che il nodo centrale delle rete, in generale, non coincide con il baricentro, come accade invece per il triangolo equilatero.

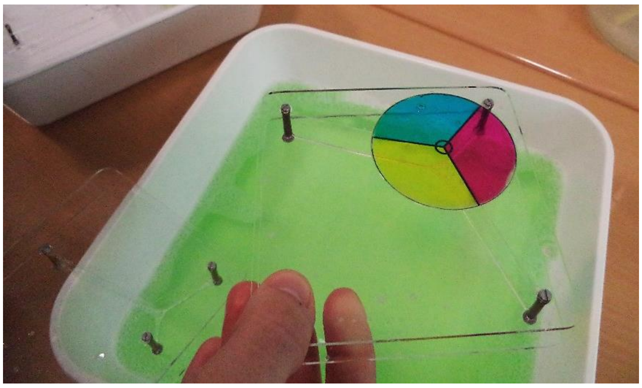

Figura 17 – Il caso di un triangolo non equilatero.

Materiale utilizzato nel laboratorio

Per ogni gruppo, oltre alle schede di lavoro:

- un pannello di compensato con degli occhioli metallici in corrispondenza dei vertici di un triangolo equilatero, uno per gruppo;
- spago;
- forbici;
- metro da sarto;
- piano cartesiano segnato sul pavimento con nastro adesivo colorato e metro da sarto;
- 5 tessere colorate con i vertici del triangolo equilatero segnati;
- lastrine parallele di plexiglas accoppiate con tre pioli posti ai vertici di un triangolo equilatero;
- una bacinella con acqua e sapone;
- guanti per tutti.

Riferimenti bibliografici

LUMINATI D. & TAMANINI I, 2009, Problemi di massimo e di minimo, Milano, Mimesis Edizioni.]

EMMA CASTELNUOVO, ARZARELLO F. (curatore); BARTOLINI M. G. (curatore), 2017, Didattica della matematica, UTET Università

Ringraziamenti

Si ringraziano la prof.ssa Maura Bonazza e il prof. Michele Avancini del Collegio Arcivescovile "C. Endrici" per averci ospitato nelle loro classi prime, permettendoci di sperimentare il percorso qui presentato.