FONDAZIONE
CASSA DI RISPARMIO
DI TRENTO E ROVERETO

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI TRENTO
Dipartimento di Matematica

LEONARDO DA VINCI
LICEO SCIENTIFICO E LINGUISTICO | TRENTO

Conoscenze matematiche di base per l'accesso all'università: lo sviluppo e la verifica graduale delle competenze lungo il corso del curriculum, attività laboratoriali come contesti per motivare all'uso e al consolidamento di conoscenze e competenze di base

Enti partecipanti:

Liceo Scientifico "L. da Vinci" di Trento
Liceo "B. Russell" di Cles
Istituto di Istruzione "M. Curie" di Pergine
Istituto di Istruzione "G. Floriani" di Riva del Garda
Fondazione Cassa di Risparmio di Trento e Rovereto
Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento

Povo, settembre 2012

Hanno contribuito:
Aldrighetti Angela, Arrigoni Francesca, Avancini Michele, Bonmassar Cristina, Carrara Claretta, Dorigotti Giancarlo, Fedrizzi Manuela, Franceschini Antonella, Gabrielli Sandra, Groff Bruna, Iachelini Fulvio, Manara Raffaella, Mazzini Francesca, Mingazzini Marina, Ossana Elisabetta, Paoli Renata, Pegoretti Stefano, Zattoni Gianna.

liceo RUSSELL CLES

Istituto d'Istruzione G. Floriani
INDIRIZZO LICEALE E TECNICO

Premessa

Il progetto "Conoscenze matematiche di base per l'accesso all'università: lo sviluppo e la verifica graduale delle competenze lungo il corso del curriculum, attività laboratoriali come contesti per motivare all'uso e al consolidamento di conoscenze e competenze di base" è stato cofinanziato dalla **Fondazione Cassa di Risparmio di Trento e Rovereto** nell'ambito del bando per progetti sperimentali 2010-2012 rivolto agli Istituti di Istruzione Secondaria di secondo grado del Trentino.
Al finanziamento hanno partecipato tutti gli Istituti Scolastici coinvolti nel progetto: il **Liceo Scientifico "L. da Vinci" di Trento**, il **Liceo "B. Russell" di Cles**, l'**Istituto di Istruzione "M. Curie" di Pergine** e l'**Istituto di Istruzione "G. Floriani" di Riva del Garda**. Inoltre il progetto ha avuto la collaborazione e il cofinanziamento del **Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento**.

Questo progetto è stato realizzato grazie al contributo dei docenti:

Angela Aldrighetti, Istituto di Istruzione "M. Curie" – Pergine

Francesca Arrigoni, Istituto di Istruzione "M. Curie" - Pergine

Cristina Bonmassar, Liceo "Leonardo da Vinci" – Trento

Claretta Carrara, Liceo "B. Russell" - Cles

Manuela Fedrizzi, Istituto di Istruzione "M. Curie" - Pergine

Antonella Franceschini, Liceo "Leonardo da Vinci" – Trento

Sandra Maria Gabrielli, Liceo "B. Russell" - Cles

Bruna Groff, Istituto di Istruzione "M. Curie" - Pergine

Fulvio Iachelini, Liceo "B. Russell" - Cles

Francesca Mazzini, Istituto di Istruzione "M. Curie" – Pergine[1]

Marina Mingazzini, Liceo "B. Russell" – Cles

Renata Paoli, Liceo "B. Russell" – Cles

Stefano Pegoretti, Istituto di Istruzione "G. Floriani" – Riva del Garda

Gianna Zattoni, Liceo "B. Russell" - Cles

L'Istituto capofila del progetto è stato il Liceo Scientifico "L. da Vinci" di Trento, dirigente prof. **Alberto Tomasi**.

La responsabile amministrativa, che ha tenuto i contatti con la Fondazione CARITRO, è stata la prof.ssa **Cristina Bonmassar**, docente di Matematica e Fisica del Liceo Scientifico "Leonardo da Vinci" di Trento.

La responsabile degli aspetti organizzativi e scientifico-didattici è stata la dott.ssa **Elisabetta Ossanna** del Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento.

L'esperta di riferimento del progetto è stata la prof.ssa **Raffaella Manara**.

Hanno inoltre collaborato alla realizzazione del progetto il prof. **Giancarlo Dorigotti** e il dott. **Michele Avancini**.

[1] Nell'anno 2011/2012 la prof. Francesca Mazzini ha prestato servizio presso l'ITT "A. Pozzo" di Trento.

SOMMARIO

Premessa **3**
SOMMARIO **5**
PRESENTAZIONE DEL PROGETTO **7**
Modalità di lavoro 10
Punti di forza 11
La collaborazione del Dipartimento di Matematica 13
Classi e incontri 14
RIFLESSIONI **19**
Le parole della matematica: "funzione" **24**
SPERIMENTAZIONE IN CLASSE **29**
Geometria in gruppo **31**
Prologo 33
Scheda riassuntiva 34
Descrizione attività 35
Problem solving di geometria **75**
Scheda riassuntiva 77
Descrizione attività 80
Percorso di geometria solida per il triennio **91**
Premessa 93
Scheda riassuntiva 94
Descrizione dell'Attività 97
Funzioni quadratiche **139**
Scheda riassuntiva 141
Valutazione dell'attività 142
Descrizione dell'attività 144
Derivata **169**
Scheda riassuntiva 171
Descrizione dell'attività 172
Equazioni differenziali **175**
Scheda riassuntiva 177
Descrizione dell'attività 178
Rette nel piano cartesiano **185**
Scheda riassuntiva 187
Descrizione dell'attività 189
Percorso introduttivo alla geometria analitica della retta **213**
Scheda riassuntiva 215
Descrizione dell'attività 217
Trasformazioni geometriche **237**
Scheda riassuntiva 239
Descrizione dell'attività 241
VERIFICA DELLE CONOSCENZE DI BASE: algebra, equazioni e disequazioni **283**
Introduzione **284**
Descrizione del campione 285
Quadro di riferimento delle verifiche 288
"Test di Terza" - Quesiti e analisi domande **291**
"Test di Quarta" - Quesiti e analisi domande **305**
Esempi di analisi degli errori **321**
Simulazione della verifica delle conoscenze per l'ingresso ai corsi di laurea **324**

PRESENTAZIONE DEL PROGETTO

Elisabetta Ossanna - Dipartimento di Matematica Università di Trento
Francesca Mazzini - Dipartimento di Matematica Università di Trento

Questo volume raccoglie la documentazione relativa al progetto "*Conoscenze matematiche di base per l'accesso all'università: lo sviluppo e la verifica graduale delle competenze lungo il corso del curriculum, attività laboratoriali come contesti per motivare all'uso e al consolidamento di conoscenze e competenze di base*" che si è svolto nel biennio 2010-2012. In particolare contiene alcune esperienze didattiche progettate, sperimentate e documentate dai docenti di scuola secondaria di secondo grado indicati in premessa in collaborazione con il Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento, rappresentato in particolare dalla dott.ssa Elisabetta Ossanna. Come indicato in premessa hanno collaborato alla realizzazione del progetto il prof. Giancarlo Dorigotti e il dott. Michele Avancini, che avevano anche contratti di collaborazione con il Dipartimento di Matematica. Anche la Prof.ssa Francesca Mazzini, docente partecipante al progetto, aveva un contratto di collaborazione col Dipartimento di Matematica. Le persone "afferenti" al Dipartimento di Matematica e coinvolte nel progetto, in particolare la dott.ssa Ossanna, hanno contribuito al lavoro del gruppo fornendo costante consulenza alla progettazione, realizzazione e documentazione delle attività svolte, nonché coordinando gli aspetti organizzativi e quelli didattico - disciplinari.

Il gruppo di lavoro era nato prima dell'avvio di questo progetto in seguito alle riflessioni di alcuni docenti sulle difficoltà riscontrate dagli studenti nella risoluzione di semplici equazioni e disequazioni, anche in prossimità degli esami di stato. La riflessione sul problema ha portato alla costruzione di una verifica da somministrare agli studenti alla fine del secondo anno di studi per individuare e verificare le loro difficoltà. Questo lavoro, in particolare i deludenti risultati ottenuti dalla somministrazione del test, ha portato i docenti ad avere dei riscontri oggettivi su tali difficoltà e a riflettere sulle criticità nell'insegnamento - apprendimento degli argomenti oggetto della verifica, portandoli a sviluppare riflessioni sulle pratiche didattiche.

Nell'ambito del progetto qui documentato si è focalizzata l'attenzione sullo sviluppo delle conoscenze e competenze di base, relative ad algebra e geometria, oggetto anche delle verifiche in ingresso ai corsi di laurea scientifici. Partendo dall'analisi di alcune domande pubbliche di queste verifiche si è riflettuto contestualmente sullo sviluppo graduale e sull'accertamento delle competenze e conoscenze interessate. Nella riflessione e progettazione di percorsi didattici, si è privilegiato il punto di vista di un apprendimento a spirale, tenendo conto di come conoscenze e competenze dovrebbero radicarsi in modo graduale e sempre più consapevole nello studente. L'attenzione costante per le conoscenze matematiche di base per l'accesso all'università ha portato le scuole coinvolte alla collaborazione con il Piano Nazionale Lauree Scientifiche, aderendo ad una sperimentazione pilota a livello nazionale, con l'offerta agli studenti di una simulazione della verifica delle conoscenze per l'ingresso ai corsi di laurea scientifici. Inoltre una selezione delle domande predisposte dal gruppo di lavoro (nell'ambito degli strumenti di verifica finalizzati al monitoraggio degli apprendimenti) è stata utilizzata per la verifica delle conoscenze in ingresso del corso di laurea in "Interfacce e tecnologie della comunicazione".

Il progetto ha permesso ai docenti di svolgere un lavoro di ricerca, confrontarsi con esperti, progettare attività e percorsi didattici che favorissero l'apprendimento dei suddetti argomenti, nonché di migliorare lo strumento di verifica delle relative conoscenze. Quest'ultimo, inizialmente oggetto principale di lavoro del gruppo, ha lasciato sempre più spazio alle altre attività di riflessione, confronto, progettazione e sperimentazione di percorsi didattici.

La sezione finale del volume è dedicata alla verifica delle conoscenze somministrato negli anni scolastici 2010/2011 e 2011/2012. Le altre sezioni contengono i percorsi didattici relativi ai temi su cui si è lavorato, in particolare:

- Le parole della matematica: "Funzione" – prof.ssa Raffaella Manara
- Geometria in gruppo: gare e problemi di geometria al biennio - prof.ssa Antonella Franceschini, prof.ssa Marina Mingazzini
- Problem solving di geometria - prof.ssa Renata Paoli
- Percorso di geometria solida per il triennio - prof.ssa Cristina Bonmassar
- Funzioni quadratiche - prof.ssa Francesca Arrigoni
- Derivata - prof.ssa Angela Aldrighetti
- Equazioni differenziali - prof. Stefano Pegoretti
- Rette nel piano cartesiano - prof.ssa Sandra Maria Gabrielli
- Percorso introduttivo alla geometria analitica della retta - prof.ssa Gianna Zattoni
- Trasformazioni geometriche - prof.ssa Claretta Carrara

Modalità di lavoro

Il lavoro, realizzato attraverso incontri in presenza e a distanza, utilizzando anche uno spazio di condivisione on-line, si è concretizzato in momenti di confronto per tutto il gruppo e, per rispondere alle differenze di contesto e di interessi, in attività per "sottogruppi". In particolare il lavoro si è differenziato nel seguente modo:

- lavoro plenario: aspetti generali del progetto, confronto su esperienze significative, predisposizione di strumenti di valutazione, analisi di risultati relativi a somministrazioni di verifiche, presentazione di attività progettate;
- lavoro dei sottogruppi: approfondimenti su aspetti disciplinari e metodologici, predisposizione di materiali e strumenti specifici, relativi al tema scelto.

Si è rivelato molto proficuo individuare dei sottogruppi tematici che potessero interagire più strettamente per progettare, sperimentare e confrontare le sperimentazioni.

La positiva interazione tra gli attori coinvolti, la condivisione di obiettivi e di stimoli, nonché il costante aggiornamento sull'evolversi delle diverse sperimentazioni, hanno reso fruibili le relazioni finali sui vari argomenti affrontati, anche per coloro avevano lavorato su temi diversi. Questo non significa che le sperimentazioni siano state replicate in toto da tutti i docenti coinvolti, ma importanti spunti innovativi tratti da esse sono stati trasportati nella didattica dei diversi componenti del gruppo. Il "gruppo allargato" ha potuto godere degli stessi stimoli e di un clima di condivisione senza per questo esser forzato a lavorare tutto nella stessa direzione.

Questa attenzione per le aspettative e per gli interessi dei singoli, gestiti in modo flessibile e dando il dovuto spazio per la condivisione delle diverse esperienze, è stata un elemento di successo che ha facilitato la diffusione all'interno del gruppo delle sperimentazioni didattiche che si andavano concretizzando.

Il coordinamento da parte del Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento ha portato a una modalità di lavoro che si è avvicinata sempre più a quello che in letteratura è considerato un modello di riferimento per un'innovazione duratura della didattica: una **comunità professionale di apprendimento**.

Il gruppo si è avvalso del supporto della prof.ssa Raffaella Manara, docente ricercatrice di Milano, quale esperta di riferimento. L'esperienza di insegnamento unita alla competenza disciplinare e pedagogica della docente hanno giocato un ruolo essenziale nel determinare il lavoro degli insegnanti e nel portarli ad una profonda consapevolezza delle problematiche affrontate entrando nel merito del lavoro in classe. La prof.ssa Manara ha supportato con interventi, in presenza o a distanza, le sperimentazioni intraprese dagli insegnanti, arricchendole e dando possibili interpretazioni degli esiti.

All'inizio di ogni anno scolastico è stato organizzato un workshop intensivo di due giornate cui ha partecipato tutto il gruppo e nel quale la prof.ssa Manara ha presentato spunti e possibili percorsi relativamente ad alcuni argomenti precedentemente proposti dal gruppo (ad esempio geometria dello spazio, problem-solving in geometria, approccio agli insiemi numerici, introduzione alle equazioni, ecc.). In queste occasioni alcuni docenti hanno presentato relazioni frutto di ricerche o di esperienze personali. A conclusione di ciò, venivano delineate le linee guida per il lavoro dell'anno, che ognuno interpretava e realizzava secondo la propria sensibilità e il contesto in cui operava. Nel corso dell'anno scolastico si sono svolti incontri per "sottogruppo d'interesse" per progettare e monitorare in corso d'opera le attività, intercalati con alcuni plenari di condivisione e rendicontazione. A fine anno scolastico ogni docente o gruppo di docenti ha relazionato sull'esperienza fatta.
Oltre al supporto della prof.ssa Manara, il progetto si è avvalso della collaborazione del prof. Luigi Tomasi e del dott. Domenico Luminati sull'uso di software didattici come ausilio per l'insegnamento - apprendimento della geometria.

Punti di forza

Il gruppo si è formato intorno a un problema concreto evidenziato dagli insegnanti (difficoltà degli studenti nella risoluzione di equazioni e disequazioni anche nel triennio della scuola superiore) con l'obiettivo di costruire uno strumento per analizzarlo e di realizzare interventi didattici volti a ridurre le difficoltà riscontrate dagli studenti. Partire da un problema non imposto dall'esterno e molto sentito dai docenti coinvolti ha permesso di avviare una riflessione sugli aspetti didattici relativi all'insegnamento dell'algebra nel biennio. Questo ha portato successivamente i singoli insegnanti ad una revisione di alcuni punti del loro programma di lavoro in classe. Nonostante il lavoro fosse inizialmente concentrato su un argomento circoscritto, si è comunque consolidata un'apertura all'innovazione didattica, con modalità efficaci di interazione con gli studenti finalizzate a far leva sulla loro responsabilità e partecipazione attiva.

Per la buona riuscita del progetto si ritiene che sia stato determinante il lavoro di supporto del Dipartimento di Matematica, volto a cogliere gli interessi e i bisogni dei singoli per canalizzarli in un lavoro d'equipe. Infatti come sottolineato nella riflessione della prof.ssa Manara:

> *"Elemento qualificante per condurre il lavoro di ricerca è il legame stabile e strutturato con l'ambito universitario, …. Non si tratta solo di un coordinamento formale, ma di una profonda implicazione nell'impostazione del lavoro… Mi pare insostituibile per il lavoro di gruppi di insegnanti avere un polo di riferimento non strettamente interno alla scuola, interessato però attivamente e in modo propositivo alle problematiche scolastiche e formative... Più importante è che studio e lavoro dei partecipanti possano essere indirizzati, dialettizzati e messi in discussione, criticati e confrontati."*

Per la riuscita del progetto sono stati ovviamente fondamentali l'entusiasmo degli insegnanti, la loro professionalità e il loro impegno. Dalle interviste informali avute con gli insegnanti coinvolti nel progetto è emerso che questo lavoro sia stato per tutti un'occasione per

- sviluppare ulteriormente le proprie competenze disciplinari-culturali-professionali
- fare ricerca sull'apprendimento e l'insegnamento scolastico
- sperimentare e apprezzare modalità didattiche di "laboratorio", inteso come una modalità di lavoro condiviso e partecipato, che incoraggia la sperimentazione e la progettualità, sia dell'insegnante che degli studenti, portando tutti gli attori in gioco a pensare-realizzare-valutare
- svolgere semplici indagini su alcune conoscenze matematiche degli studenti limitate a piccole popolazioni.

Per determinare il buon esito di questa attività di ricerca – azione - formazione sono risultati fondamentali alcuni aspetti, tra cui:

- far emergere le esigenze degli insegnanti e partire da queste per impostare il lavoro di ricerca-azione-formazione
- lavorare "per temi" in piccoli gruppi
- far parte di una rete di contatti che permettesse di co-progettare attività successivamente condivise e valutate dal gruppo
- coinvolgere docenti-ricercatori ovvero insegnanti della scuola "esperti", quali ad esempio la Prof.ssa Manara e il prof. Tomasi
- condividere tra pari (docenti) difficoltà e successi
- avere una struttura organizzativa che facilitasse gli incontri del gruppo, sia tra insegnanti che con gli esperti.

Ovviamente nella realizzazione del progetto sono emerse anche alcune difficoltà. Molti dei docenti coinvolti infatti, oltre ai consueti impegni degli insegnanti, avevano diversi incarichi all'interno della scuola (responsabili di progetti, responsabili di dipartimento, collaboratori del preside, ecc.) per cui è risultato spesso faticoso trovare date opportune per organizzare gli incontri.
Sicuramente, però, l'aspetto più complesso è stata la gestione burocratica della rete di scuole ed enti che ha dovuto sostenere la responsabile amministrativa, referente dell'istituto capofila, Prof.ssa Cristina Bonmassar, coadiuvata anche dalla segreteria dell'Istituto. Infatti per un insegnante, già carico di lavoro, dover interagire con altre scuole per gestire i finanziamenti, gli accordi, la rendicontazione richiede una disponibilità di tempo e un dispendio di energie consistenti.

Si ritiene comunque che il progetto sia stato un successo. Testimonianza di ciò è il fatto che i docenti abbiano deciso di continuare a lavorare insieme, anche senza il supporto di un progetto esterno, per approfondire gli aspetti affrontati in questi anni e per svilupparne ulteriori. I docenti del progetto infatti hanno ritenuto fondamentali i momenti di confronto e condivisione delle esperienze, nonché il contatto con esperti, e hanno ritenuto l'esperienza talmente valida da cercare di coinvolgere altri colleghi nelle loro attività.

La collaborazione del Dipartimento di Matematica

Il Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento ha interagito con il progetto qui presentato attraverso proposte diversificate a seconda delle fasi, come di seguito descritto.
Il Dipartimento di Matematica ha garantito

- il coordinamento degli aspetti organizzativi e di quelli didattico-disciplinari , rappresentato dalla dott.ssa Elisabetta Ossanna, che ha supportato il gruppo con la sua consulenza, la partecipazione agli incontri e alle attività, l'interazione costante con gli esperti, il contributo alla progettazione delle attività e la revisione dei materiali;

- la consulenza per la progettazione degli incontri del gruppo di lavoro, per la revisione dei materiali e il coordinamento dell'analisi dei dati da parte del prof. Giancarlo Dorigotti, della dott.ssa Francesca Mazzini e del dott. Michele Avancini, che attualmente collaborano con il Dipartimento di Matematica nell'ambito della ricerca in didattica della matematica.

Il progetto ha goduto di interessanti interazioni con il **Piano Nazionale Lauree Scientifiche**[2] - Orientamento e Formazione Insegnanti per l'area Matematica, sia nazionale (http://www.progettolaureescientifiche.eu/), il cui coordinatore è il prof. Gabriele Anzellotti, che locale (http://plstrento.wordpress.com/), il cui referente è il prof. Silvano Delladio:

- per la progettazione e la realizzazione di attività laboratoriali basate sull'uso di software di geometria dinamica, garantendo anche la consulenza dei professori Luigi Tomasi del Liceo, docente di scuola superiore, e Domenico Luminati del Dipartimento di Matematica;

- per la ricerca relativa a strumenti di verifica delle competenze e conoscenze di base, e loro realizzazione, in particolare facendo riferimento all'azione trasversale **Autovalutazione e verifiche** che dal 2005 si occupa di questi temi. Questa azione ha garantito al gruppo di lavoro la disponibilità dei dati relativi alle indagini effettuate a livello nazionale all'ingresso dei corsi di laurea scientifici, la competenza acquisita nella costruzione di strumenti di misura e la condivisione del **Syllabus delle conoscenze per le prove di selezione e di verifica delle conoscenze richieste per l'ingresso ai corsi di laurea scientifici** (https://laureescientifiche.cineca.it/public/)

Per quanto riguarda questioni relative a strumenti di verifica e di autovalutazione delle competenze e conoscenze di base si è fatto riferimento anche al progetto **Orientamat** del Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento, che dal 2001 si occupa di questi temi e proprio per questo è strettamente collegato all'azione trasversale "Autovalutazione e verifiche" del Piano Lauree Scientifiche.

[2] Il Piano Nazionale "Lauree Scientifiche" (avvia*to nel 2005) è promosso dal Ministero dell'Istruzione, Università e Ricerca, dalla Conferenza* dei Presidi delle Facoltà di Scienze e da Confindustria con la finalità di incrementare il numero degli immatricolati e dei laureati in Chimica, Fisica, Matematica, Scienza dei Materiali, mantenendo un alto standard di qualità degli studenti e potenziando il loro inserimento nel mercato del lavoro.

Classi e incontri

Classi e allievi coinvolti

Le classi coinvolte nel progetto appartengono agli indirizzi scientifico, tecnico e psico-socio-pedagogico.

Anno scolastico 2010/2011

Per quanto riguarda le verifiche trasversali sulle competenze di base, la somministrazione ha interessato complessivamente

- 310 studenti delle classi terze
- 256 studenti delle classi quarte

per un totale di 566 studenti.

Per quanto riguarda la progettazione e sperimentazione di esempi di attività didattiche atte a favorire il raggiungimento e la permanenza di alcune competenze di base, richieste anche all'ingresso all'Università, c'è stato il coinvolgimento di

- 6 classi prime,
- 1 classe seconda,
- 2 classi terze,
- 2 classi quarte,
- 2 classi quinte

appartenenti all'indirizzo scientifico, tecnico e psico-socio-pedagogico, per un totale di circa 240 studenti.

Anno scolastico 2011/2012

Per quanto riguarda le verifiche trasversali sulle competenze di base, la somministrazione ha interessato complessivamente

- 252 studenti delle classi terze
- 223 studenti delle classi quarte

per un totale di 475 studenti.

Per quanto riguarda la progettazione e sperimentazione di esempi di attività didattiche atte a favorire il raggiungimento e la permanenza di alcune competenze di base, richieste anche all'ingresso all'Università, c'è stato il coinvolgimento di

- 7 classi seconde,
- 2 classi terze,
- 3 classi quarte
- 1 classe quinta

appartenenti all'indirizzo scientifico, tecnico e psico-socio-pedagogico, per un totale di 475 studenti.

Calendario degli incontri del gruppo di progetto

Anno 2010 – 2011

5 ottobre 2010	Incontro di avvio progetto
18 ottobre 2010	Incontro di avvio lavoro con il gruppo dei docenti dell'Istituto M. Curie di Pergine
5 novembre 2010	La sperimentazione didattica nel biennio: il ruolo dei problemi. Discussione e proposte di lavoro per quest'anno La sperimentazione didattica nel triennio: il metodo degli "annullatori e test" come approccio alle disequazioni e ai grafici di funzione (dal biennio al triennio fino ad arrivare al concetto di limite).
16-17 dicembre 2010	Workshop ""La didattica della geometria: problematiche ed esperienze a confronto". " – relatrice Prof.ssa Manara Programma La geometria nel biennio. 1. Presentazione di un'attività di ricerca basata su attività di problem-solving in geometria dalle medie al biennio delle superiori. 2. Le scelte didattiche alla base del testo "Matematica controluce per il biennio ", Manara e altri, Etas scuola. 3. Obiettivi minimi alla fine del biennio e modalità di verifica. La geometria nel triennio 4. La geometria dello spazio nel triennio (con proposte per un percorso didattico) 5. Quale rapporto tra geometria sintetica e analitica?
25 febbraio 2011	Presentazione dei dati del test 2010 ai docenti del Dipartimento di Matematica dell'Istituto Curie
15 marzo 2011	Presentazione dei dati del test 2010 ai docenti del Dipartimento di Matematica dell'Istituto Russell
01 aprile 2011	Presentazione dei dati del test 2010 ai docenti del Dipartimento di Matematica dell'Istituto Da Vinci
7 aprile 2011	Incontro per la redazione definitiva del test 2011, da somministrare alle classi terze e quarte.

Anno 2011 – 2012

24 ottobre 2011	Workshop di inizio anno • programma e modalità di lavoro • collaborazione con il Piano PLS per la realizzazione di attività didattiche con software • analisi risultati verifica di maggio 2011
Novembre - gennaio	Incontri per sottogruppi volti alla progettazione delle attività didattiche
20 febbraio 2012	Presentazione di esperienze didattiche di geometria dello spazio con l'uso di Cabri - 3D e di modelli fisici – prof. Luigi Tomasi
16 aprile 2012	Workshop di presentazione delle esperienze didattiche del 2011/2012 Uso del software • Geometria dello spazio • Problem solving in geometria • Test: discussione delle domande in classe modifiche, organizzazione somministrazione, raccolta dati)
29 maggio 2012	Workshop conclusivo condotto dalla prof.ssa Raffaella Manara • Le parole della matematica "funzione" • l'insegnamento della geometria: gli aspetti didattici e la scelta dei contenuti in relazione alle attività del progetto

Ringraziamenti

Si ringraziano tutti i soggetti coinvolti nel progetto che ne hanno permesso la buona riuscita grazie all'entusiasmo, la professionalità e la collaborazione mostrati, in particolare si ringraziano la Prof.ssa **Cristina Bonmassar** per il tempo dedicato alla gestione burocratica della rete di scuole ed enti, per prendere accordi, per gestire i finanziamenti e la rendicontazione finanziaria, la prof.ssa **Francesca Arrigoni**, il Prof. **Giancarlo Dorigotti** e il dott. **Michele Avancini** per la professionalità mostrata nell'analisi dei dati e nella predisposizione del documento di rendicontazione finale.

Il progetto è debitore alla Prof.ssa **Raffaella Manara** per la preziosissima collaborazione. La sua esperienza di insegnamento, la sua competenza disciplinare e pedagogica, nonché la sua sensibilità hanno giocato un ruolo essenziale nell'orientare il lavoro qui documentato e nel trasmettere una profonda consapevolezza delle problematiche affrontate nel progetto.

Infine un ringraziamento al Prof. **Gabriele Anzellotti** che è riuscito ad aggregare attorno ai problemi dell'insegnamento della matematica sia docenti della Scuola Secondaria che docenti del Dipartimento di Matematica, creando un ambiente favorevole alla realizzazione del progetto, sia dal punto di vista culturale che delle risorse umane.

RIFLESSIONI

Raffaella Manara

Insegnanti ricercatori

"La matematica non è uno sport per spettatori". Parafrasando questa simpatica citazione di D. Tall, che ho spesso ricordato ai miei studenti, potremmo dire che l'insegnamento della matematica non è affare per ripetitori.

Il gruppo di insegnanti che ha partecipato alla ricerca in questi anni ha dimostrato che la sensibilità e l'iniziativa personale sono sorgenti insostituibili per produrre materiali, sviluppare esperienze didattiche nuove, interrogarsi a fondo sui problemi scolastici e sull'efficacia della scuola.

Infine, e non è poco, "mettersi in gioco" in prima persona contribuisce a trovare o a ritrovare gusto per il proprio lavoro, dimostrando che si può insegnare con la voglia di comunicare qualcosa di sé e stimando il desiderio e le capacità di conoscere dei giovani.

Questo però non succede casualmente o in modo improvvisato: servono alcune condizioni e si deve seguire un buon metodo di lavoro.

Le condizioni per lavorare

Elemento qualificante per condurre il lavoro di ricerca è il legame stabile e strutturato con l'ambito universitario, imperniato sull'attività della dott. Ossanna. Non si tratta solo di un coordinamento formale, ma di una profonda implicazione nell'impostazione del lavoro. Importante supporto alla sua funzione è poi la collaborazione di alcuni insegnanti, che prestano la loro opera in Università a diverso titolo, per periodi più o meno lunghi.

Mi pare insostituibile per il lavoro di gruppi di insegnanti avere un polo di riferimento non strettamente interno alla scuola, interessato però attivamente e in modo propositivo alle problematiche scolastiche e formative. Non solo c'è chi tiene le fila, convocando gli incontri, invitando persone con cui confrontarsi, richiamando le scadenze, raccogliendo i materiali per organizzarli e documentare il percorso: questi potrebbero essere aspetti solo organizzativi. Più importante è che studio e lavoro dei partecipanti possano essere indirizzati, dialettizzati e messi in discussione, criticati e confrontati.

In generale, questo riferimento offre consistenza e dignità al lavoro, che può essere riconosciuto e valorizzato dall'istituzione scolastica, e preso in considerazione anche da colleghi, dirigenti, o da altri ambiti formativi che agiscono nella scuola.

Partecipare al lavoro di un gruppo permette a ciascuno di non concepirsi come un singolo che agisce per proprio conto, in modo isolato. Il confronto e la condivisione aprono le prospettive, permettono di coagulare intorno a un punto di lavoro comune esperienze diverse, a cui partecipano situazioni scolastiche anche non omogenee tra loro (gli insegnanti del gruppo sono di diversi ordini di scuola, e insegnano in classi di età diverse).

Così, partendo da qualche aspetto particolare della didattica, è possibile cogliere linee di sviluppo successive del lavoro, che approfondiscono a ampliano lo spunto iniziale, e consentono ad altri di inserirsi. Le proposte non sono il "pallino" di qualcuno che ha tempo e buona volontà, ma assumono un interesse ampio, che le rende proponibili anche ad altri colleghi.

Il metodo

Gli insegnanti sono invitati ad approfondire anche teoricamente, attraverso letture e studi, i problemi su cui si lavora, riportando in momenti seminariali contributi e problematiche.

Tuttavia l'interesse del lavoro è nella direzione di verificare sul campo l'opportunità delle scelte didattiche e delle iniziative intraprese. L'insegnante perciò è "insegnante ricercatore" in quanto unisce le proprie conoscenze sui contenuti che insegna, con la prassi didattica che sperimenta.

I materiali raccolti dagli insegnanti documentano la loro attenzione e precisione nel pensare i tempi e le modalità con cui intendono proporre le attività, e il resoconto dettagliato dell'effettivo svolgimento o la

raccolta dei risultati raggiunti portano ad una interessante verifica, in un confronto leale e critico delle osservazioni e dei risultati con gli esiti attesi.
Ne segue una riflessione attenta e approfondita di cause, circostanze ed effetti di quanto si offre agli studenti, ed è da questa che può seguire la desiderata possibilità che le attività sperimentate diventino proponibili e condivisibili da altri insegnanti, cioè offrano esempi di "buone pratiche" didattiche innovative.

Non solo algebra

Un breve flash back sulla storia del lavoro può aiutare a chiarire.
L'inizio ha riguardato uno dei punti dolenti di tutta la didattica della matematica nella scuola: l'apprendimento dell'algebra elementare nel biennio delle superiori.
Un gruppo di insegnanti ha preparato una verifica delle conoscenze e competenze algebriche attese alla fine del secondo anno di Scuola Secondaria Superiore, che è stata somministrata, in modalità concordate, in più classi di diversi tipi di scuole.
È stata una iniziativa interessante e coraggiosa, che ha richiesto un rilevante impegno di tutti in ciascuna delle due fasi: la preparazione, nella quale si sono messi a punto gli obiettivi da sottoporre a valutazione e, naturalmente, si sono costruiti, scelti e organizzati i quesiti necessari; e la raccolta e lettura dei dati, dopo la somministrazione.
La conseguenza più significativa scaturita da questa fase iniziale è frutto, direi, del modo con cui gli insegnanti si sono interrogati sui risultati emersi, che erano molto distanti da quelli attesi.
Un fatto del genere apre due filoni di inchiesta: da una parte, ci si interroga su come è stata condotta la prova, perciò si sottopone a critica l'adeguatezza dello strumento costruito, per quanto sia stato preparato con consapevolezza e dopo scelte ponderate; dall'altra, si vuole avere ragioni sulle possibili cause dell'insuccesso evidente – emerso certo non solo in questa occasione – dell'insegnamento scolastico dei contenuti algebrici.
Entrambe le questioni hanno aperto prospettive interessanti, che hanno avuto seguito nel lavoro di ricerca successivo del gruppo.
Infatti, è stato deciso di perfezionare lo strumento di verifica, modificandone alcuni aspetti in modo da precisare gli obiettivi, e curandone la modalità di somministrazione, perché si superassero alcuni aspetti problematici. La prova è stata poi ripetuta l'anno successivo con modalità parzialmente diverse. Ciò ha permesso di non trarre conclusioni da una singola occasione di "esperimento", ma di valutare il ripetersi di prove e di riflettere sui dati emergenti (ultimi due documenti del fascicolo).

In una seconda direzione, gli insegnanti hanno cominciato a riflettere sui nuclei fondanti della matematica e del suo insegnamento, per fare tentativi di innovazione in tre direzioni.

a) La prassi didattica più comune, in cui si propongono regole di manipolazione, poi applicazioni delle regole, spesso in esercizi alquanto ripetitivi, non dà buoni risultati nell'apprendimento dell'algebra, che non è solo un insieme di algoritmi manipolativi di simboli.
   Una strada certamente più ricca e stimolante è dare spazio alla valenza formativa dell'attività di risoluzione di problemi, sia in riferimento all'apprendimento dell'algebra in particolare, più in generale per ogni aspetto in matematica.
   Alcuni insegnanti avevano già impostato la loro didattica in questo senso, ed hanno offerto interessanti materiali, altri hanno scelto di fare tentativi di utilizzare problemi di vario genere come strumento di introduzione e presentazione di argomenti, non solo come attività di "applicazione", bensì come stimolo all'iniziativa e alla capacità di ragionamento dei ragazzi.
   Due delle sperimentazioni riportate nel seguito (1 e 2) riguardano questo aspetto di metodo didattico, ma esso è presente anche in altre esperienze (per esempio la 4), in cui pervade il percorso proposto.

In generale, si sono tratte positive valutazioni dalle esperienze fatte, sia dal punto di vista della partecipazione degli studenti, sia nella ricaduta complessiva sull'apprendimento. In questo senso, un giudizio motivato e ragionato richiede tempi lunghi: l'efficacia di un metodo spesso emerge nell'arco degli anni, non sempre dei mesi.

È stata questa un'altra importante caratteristica delle ricerca: la sua continuità e durata nel tempo permette un'osservazione adeguata e seria dei processi che si attivano.

b) Dal punto di vista dell'insegnamento dell'algebra, si è dato spazio alla ricerca dei nuclei concettuali che preludono e condizionano l'apprendimento algebrico, in particolare, per l'inizio della Scuola Superiore, al passaggio dal pensiero numerico al pensiero algebrico. Per tutto il percorso della scuola superiore, invece, è lo sviluppo del concetto di funzione, nel suo significato e nelle sue rappresentazioni anche grafiche, ad avere un posto rilevante nella didattica del linguaggio algebrico (sperimentazioni 4, 7 e 8): se infatti esso non è acquisito in modo soddisfacente, emergeranno difficoltà nell'altro importante passaggio a cui condurre i ragazzi, quello all'analisi infinitesimale (sperimentazioni 5 e 6).

   Questa tematica chiarisce l'importanza dell'argomento "algebra", la sua centralità e necessità, oltre e al di là degli aspetti puramente algoritmici.

c) Un'idea che si è fatta strada positivamente, partendo dalla questione algebrica ma poi allargandosi anche a vita propria, è stata l'importanza dell'insegnamento e apprendimento della geometria per una visione significativa e completa della matematica in generale (sperimentazioni 1, 2, 3, 9).

   Alcuni insegnanti hanno dedicato spazio ad attività significative e importanti di laboratorio con software didattici (Cabri, Cabri 3D e Geogebra), adatte a stimolare gli studenti ad un apprendimento attivo e personale, creando percorsi interessanti ed efficaci di apprendimento, e reinglobando nell'apprendimento formale dell'algebra la grande possibilità che la geometria offre di usare fantasia e rappresentazione per raggiungere concetti complessi e conquistare astrazione elevata.

   In particolare, si è ripreso in considerazione un aspetto a torto molto trascurato dalla scuola superiore, la geometria dello spazio, che è ritenuta difficile e poco interessante, mentre presenta spunti felici e ricchi di scoperta, aprendo ad una conoscenza attivamente raggiunta non per ripetizione di formule, ma per "esperienza" di osservazione e di rapporto con la realtà fisica.

Nuove iniziative, non schemi precostituiti

È interessante sottolineare che il lavoro di insegnanti ricercatori propone una forma di aggiornamento "attivo" (in buona consonanza con quello che vogliamo proporre ai nostri studenti!), che non si limita a cercare nuove "ricette" da applicare, sperando in un sicuro rendimento. Piuttosto, ci si addentra contemporaneamente nel profondo della matematica e nella complessità dell'insegnarla, seguendo nuove problematiche che nascono da proposte e iniziative di approfondimento.

La disponibilità e la flessibilità che un insegnante deve dimostrare non può significare andar dietro ad ogni nuova bandiera, perché la novità non è sempre solo un miglioramento, e ci sono criteri e prassi che valgono, perciò vanno conservate o addirittura riscoperte. Arricchire la propria figura professionale implica raggiungere consapevolezza sempre più personale, matura e critica di quello che l'esperienza scolastica quotidiana ci mette davanti.

Le parole della matematica: "funzione"

Raffaella Manara

Questo è il contributo della prof.ssa Raffaella Manara in occasione del workshop conclusivo del progetto tenutosi nel maggio 2012. In questa occasione la professoressa Manara ha sintetizzato le riflessioni sul ruolo del concetto di funzione nell'apprendimento della matematica nell'arco del curriculum della scuola secondaria.

Una delle descrizioni dell'apprendimento della matematica che preferisco è contenuta nell'espressione

una costruzione lenta e progressiva di un sapere ricco di significato.

L'apprezzo perché, per chi insegna, contiene la pazienza del percorso (*lenta e progressiva*) degli anni di scuola, ma soprattutto caratterizza una visione che non è condivisa da tutti né praticata unanimemente.
Parlare di una *costruzione* pone l'accento su quello che Freudenthal bene esprime quando afferma che "la matematica è un'attività": invece troppo speso l'atteggiamento degli studenti manifesta passività, e le prassi didattiche la coltivano.
Soprattutto, la semplice frase "un sapere ricco di significato", che condensa ciò che nella matematica amiamo, si oppone decisamente alla mentalità più diffusa e tenacemente radicata nella cultura che ci circonda, per la quale in matematica contano le procedure, le "regole", che devono funzionare, non importa che cosa significhino. Troppo spesso quando un ragazzo è impegnato sulla matematica, quello che cerca non è il significato, quello che fa non è una costruzione mentale.

Per questa premessa, mi pare utile evidenziare nella matematica quei nuclei concettuali, quei punti nodali intorno ai quali si innalza la sua costruzione, che in generale sono così forti e importanti da richiedere una lunga elaborazione, prima che possiamo dire di averne afferrato se non tutto il significato, almeno una parte soddisfacente, che, per esempio, permette di farne uso.

La "presa" che abbiamo raggiunto sul concetto è connessa all'uso che siamo in grado di avere delle parole che lo esprimono. Sappiamo che la matematica ha un lessico non ridondante, talvolta addirittura esiguo: tuttavia, le parole della matematica hanno una "forza" crescente, a mano a mano che comprendiamo il concetto che esse indicano.
Pensiamo alla parola "numero": la utilizzano, e con competenza adeguata, anche i bambini, per i quali essa ha a lungo il significato di numero *naturale*. Ma nell'arco di tempo che copre i tredici anni della scuola, questa parola si associa a concetti molto più complessi del numero naturale, e il suo significato si allarga enormemente, fino a denotare "numeri" (i complessi) che sono ben concettualmente distanti dai naturali. Allora si capisce che la parola *numero*, che si mantiene in tutto il percorso di ampliamento concettuale, serve a identificare la *struttura* degli oggetti che manovriamo (le operazioni e le relazioni), accompagnando un notevole processo di astrazione, che veramente non può che essere *lento e* progressivo.

Oggi vorrei fare una descrizione, anche se per sommi capi, del processo analogo che riguarda la parola *funzione* e il concetto relativo.

Non credo che sia necessario soffermarsi sul fatto che si tratti di uno dei concetti fondamentali della matematica: senza di esso, non avremmo l'analisi infinitesimale, cioè non avremmo il linguaggio essenziale per la fisica e per la scienza in generale.

Rispetto al concetto di numero, tuttavia, il concetto di funzione è certamente di maggiore complessità, e la sua formazione ha un carattere meno spontaneo: chiunque, alla domanda "di che cosa si occupa la matematica?", risponderebbe che tratta dei numeri, ma ben poche persone, invece, sono in grado di affermare che la matematica ha come oggetti *relazioni.*
L'insegnamento della scuola, allora, in generale è determinante per afferrare questo contenuto.

Ho suddiviso la mia visione del percorso che può portare al concetto di funzione in due tappe.

Una prima tappa riguarda le attività e le modalità con cui si può favorire il suo fondamento, nella scuola primaria e nella secondaria di primo grado.

La seconda indica un percorso adatto alla Secondaria Superiore: coinvolge più direttamente anche l'aspetto linguistico e simbolico, può essere sviluppato fino a introdurre l'analisi infinitesimale.

1. (Vedi presentazione PowerPoint **Funzione_1**)
   Si può lavorare molto nella scuola primaria per mettere in evidenza l'idea di *relazione* tra elementi di due insiemi, in molti e vari contesti, di natura concreta o numerica o geometrica.
   Così, a partire dall'esperienza, si introduce il *linguaggio* (corrispondenza, relazione, correlazione, accoppiamento, …) e si focalizza l'attenzione sulla *coppia* che si genera. Credo che la cura di questo aspetto concettuale sarebbe anche un buon rinforzo per l'acquisizione significativa del significato dell'operazione di moltiplicazione tra numeri.
   In modo graduale si possono introdurre le forme di *rappresentazione* delle relazioni.
   Mi pare che in particolare le rappresentazioni in *tabelle* a doppia entrata possono far parte spontaneamente di molte occasioni di esperienze (raccolte di dati, organizzazione di turni, lettura di carte topografiche…), anche ludiche (dalla classica battaglia navale agli scacchi e tris, molti giochi si svolgono su reticoli piani, anche le parole incrociate). Anche i grafi ad albero si presentano in molte situazioni concrete, forse la rappresentazione meno spontanea è quella sagittale.
   Si dà così accesso a importanti modalità di simbolizzazione di concetti, modalità che forse, avendo un importante aspetto grafico, per i bambini sono meno astratte e complesse della scrittura posizionale dei numeri. Si deve poi aver cura di sviluppare entrambe le direzioni del processo di simbolizzazione: *fornire* la rappresentazione, in una delle modalità possibili, e inversamente, *interpretarla,* ricostruendo dalla visione grafica come opera la relazione (lettura delle tabelle o dei grafici).

   Nella secondaria di primo grado deve continuare il lavoro di concettualizzazione a partire dall'esperienza (non va dato per acquisito!), e le occasioni certo non mancheranno.
   Si può così arricchire e precisare il linguaggio, introducendo gradualmente elementi di simbolizzazione prealgebrica (uso delle lettere per le variabili) soprattutto nei contesti più formalizzati (relazioni numeriche o geometriche). Questo è un passo fondamentale per passare alla visione *dinamica* dell'idea di funzione, che implica il legame tra *variabili*.
   In parallelo, sul piano della rappresentazione grafica, può fare il suo ingresso la rappresentazione cartesiana, che generalizza e sviluppa le rappresentazioni tabulari o reticolari.
   Sarebbe particolarmente importante che il significato funzionale di "variare insieme" accompagnasse costantemente la conquista e l'uso delle *formule,* aspetto che entra pesantemente nell'insegnamento della matematica (e delle scienze) in questo segmento scolastico. Infatti, una

formula è importante e significativa in quanto *sintesi* di un percorso concettuale, nel quale si fissano le *relazioni* tra le grandezze, per così dire, protagoniste.
Per esempio, che l'area del quadrato si ottiene facendo "lato per lato" o "lato per se stesso" è una conoscenza espressa in modo impreciso e rozzo, ma generalmente ben acquisita già nella scuola primaria. Successivamente, la si scrive in modo simbolico, indicando con *l* il lato (la sua misura) e con A l'area (la sua misura), e questa è una delle famose "formule" della geometria: $A = l \times l$, che progressivamente, con l'introduzione delle potenze, muta in

$$A = l^2 \qquad (1)$$

Osserviamo ora la scrittura:

$$A(l) = l^2 \qquad (2)$$

Che cosa aggiunge la (2) alla (1) precedente?
Nulla, dal punto di vista del calcolo (che purtroppo, è quello che prevale nella scuola media!), molto, dal punto di vista della visione funzionale: passare da A ad $A(l)$ implica tener conto ed esprimere anche simbolicamente la dipendenza dell'area di un quadrato dal suo lato.
Pur sembrando una questione elementare, si tratta del passaggio decisivo per poter considerare *la funzione* come oggetto concettuale.
A me pare che questo passaggio sia l'obiettivo fondamentale per il primo segmento scolastico, e che ponga un requisito molto importante per tutto il percorso successivo.

2. (presentazione PowerPoint **Funzione_2**)
La scuola Superiore, se può lavorare su questo ben piantato fondamento, introduce in modo abbastanza veloce gli strumenti simbolici indispensabili per rendere una funzione oggetto di studio e lavoro, che sono gli strumenti di base dell'algebra e della geometria.
Entrano nel lessico e nei simboli così i *nomi* con cui caratterizzare gli elementi della funzione (dominio, codominio, immagine, contro immagine, univocità, …) e i simboli con cui le funzioni che interessano la matematica, che sono legami tra numeri (reali), possono essere identificate attraverso l'algebra, in una *equazione*.
L'espressione simbolica

$$A(l) = l^2$$

già ricca e significativa, tanto da poter essere compresa e usata dai ragazzi, assume la forma:

$$f(x) = x^2$$

nella quale il "nome" generico f segnala l'astrazione che raggiungiamo.
Adesso, infatti, guardiamo la relazione che associa a ogni valore di x il valore del "quadrato di x", indipendentemente dal forte significato geometrico con cui l'abbiamo avvicinata.
Con questa premessa, andiamo a cercare *le caratteristiche* della relazione "fare il quadrato".

Allo stesso modo, la rappresentazione più adeguata per funzioni espresse in questa forma simbolica è un grafico nel riferimento cartesiano, che diventa, infatti, l'appoggio geometrico prevalente.

Ci rendiamo conto, allora, che un concetto come la funzione implica un alto livello di astrazione, unito alla necessità di dominare con sicurezza tre diversi registri espressivi:

- il registro verbale che descrive le caratteristiche
- il registro algebrico che le traduce sinteticamente in caratteristiche della scrittura simbolica adottata
- il registro geometrico, che le evidenzia in caratteristiche geometriche della figura.

È comprensibile che questa complessità da un lato sia un appoggio (ci sono più accessi possibili al comprendere e dominare il concetto), dall'altro possa andare a toccare più livelli di eventuali difficoltà.
Per questo, è indispensabile pensare a un percorso che approfondisca e aggiunga gradualmente in cinque anni successive stratificazioni di significati e simbolizzazioni.
Per esempio, è opportuno che l'idea di "algebra delle funzioni" entri in un secondo momento, quando è ormai stabilizzata la consapevolezza della funzione come "oggetto", su cui potremo allora anche "operare". E si opererà dapprima con le operazioni note, quelle dell'algebra numerica (addizione, moltiplicazione, potenza, …) solo dopo con quella nuova operazione che riguarda proprio le funzioni, la *composizione*. Anche la problematica dell'*inversione* della funzione non va affrontata prematuramente.

A me pare che sia un obiettivo significativo e auspicabile che alla fine della classe quarta gli studenti abbiano buona padronanza

- del concetto di funzione e delle sue rappresentazioni algebrica e geometrica
- delle caratteristiche delle funzioni
- delle "operazioni" che su esse operiamo in analogia all'algebra.

e dispongano con sicurezza di un sufficiente repertorio delle funzioni reali di variabile reale fondamentali (conoscendone equazione e grafico, magari avendo acquisito la distinzione in funzioni algebriche e trascendenti).

Questi sono i prerequisiti più importanti per passare a "fare" sulle funzioni reali di variabile reale le "operazioni" differenziali, entrando cioè in un campo e in un metodo di analisi radicalmente nuovo e straordinariamente importante ed efficace.

Ma questo è un altro capitolo.

Bibliografia

Andreini, Manara, Prestipino, Saporiti *Pensare e fare matematica*
ETAS, Milano, 2010 e 2011,
Volumi Algebra 1 e Algebra 2 per il biennio delle superiori,
Volumi 1 e 2 per il triennio
H. Freudenthal *Ripensando l'educazione matematica* La Scuola, Brescia, 1995

SPERIMENTAZIONE IN CLASSE

Geometria in gruppo

(gare e problemi di geometria al biennio)

Antonella Franceschini, Liceo "Leonardo da Vinci" – Trento

Marina Mingazzini, Liceo "Leonardo da Vinci" – Trento

Torna indice

Prologo

Sala insegnanti del Liceo Leonardo da Vinci" di Trento.
Durante la pausa, due insegnanti di matematica si scambiano opinioni:

M.: Ho appena fatto un'ora di lezione in 2A, avevo preparato alcuni esercizi di applicazione dei teoremi di Euclide ma è stato necessario dedicare tutta l'ora alla risoluzione del primo problema.

F.: Anche in 2H ieri situazione analoga: per affrontare un problema prima bisogna far loro leggere attentamente il testo, poi guidarli nel tracciare una figura geometrica adeguato, quindi impostare la risoluzione …

M.: Inoltre, quando pare che tutti abbiano capito la procedura, tanti non sanno portare avanti i calcoli senza errori. E non parliamo di quelli che passivamente copiano dalla lavagna la risoluzione ma poi, autonomamente, non sanno affrontarli!

F.: Sai cosa penso … che sarebbe necessario dedicare molto tempo, in classe, alla risoluzione di problemi, ma, spesso, si arriva a concludere il programma nel mese di maggio.

M.: Hai ragione, tempo per fare esercizi di consolidamento e ripasso non ne rimane. Ci vorrebbe un'attività mirata alla risoluzione di problemi che riesca a coinvolgerli e motivarli maggiormente.

F.: Hai visto che nel nuovo libro di testo "Matematica a colori" sono proposti degli esercizi interessanti; alcuni di modellizzazione, altri di semplice applicazione: potremmo utilizzarli!

M.: Ma come possiamo fare per rendere l'attività più interessante ed incisiva?

F.: Potremmo farla assieme, nelle due classi!

M.: Se l'orario lo permette, perché non li facciamo lavorare in gruppi misti, proponendo loro la risoluzione di un determinato numero di problemi?

F.: Certo ! Potrebbe essere un'idea !

M.: Guardiamo l'orario ...Perfetto ! Il martedì alla quinta ora abbiamo entrambe la lezione in seconda !

F.: Iniziamo a fare una scelta di problemi da proporre che possano aiutare gli studenti a mettersi in gioco, a far emergere le proprie conoscenze, competenze, intuizioni…

M.: Inoltre, farli lavorare in gruppi misti, potrebbe essere motivante; sappiamo quanto è importante la relazione per gli adolescenti.

F.: E la valutazione?

M.: Forse potremmo fare una gara, diamo dei punteggi ad ogni esercizio a seconda della difficoltà…

Suona la campana …..

F.: ora devo tornare in classe, ma iniziamo a lavorarci ...

M.: …potrebbe essere una bella esperienza…

Scheda riassuntiva

Docenti

Franceschini Antonella e Mingazzini Marina (in compresenza)
Liceo Scientifico "Leonardo da Vinci" Trento

Classi coinvolte

2sA/2sH del Liceo Scientifico "Leonardo da Vinci" Trento

Numero di alunni per classe

22+17

Periodo dell'anno

28 febbraio – 29 maggio

Argomenti trattati

Problemi[3] inerenti al programma di geometria del biennio con particolare riferimento a : parallelismo, poligoni e proprietà, luoghi geometrici, circonferenza e proprietà, poligoni inscritti e circoscritti, equivalenza, teoremi di Pitagora ed Euclide, similitudini, calcolo delle aree.

Obiettivi di apprendimento

a) Partendo da problemi di geometria , dimostrativi e soprattutto di calcolo, sviluppare la capacità di riconoscere, recuperare ed applicare i concetti geometrici studiati nell'arco del biennio.
b) Sviluppare la capacità di spiegare le soluzioni
c) Sviluppare la capacità di organizzare il lavoro di gruppo per ottimizzare i tempi

Modalità di lavoro

Gruppi misti (2sA/2sH) preparati dalle insegnanti di 4 o 3 studenti.
La composizione dei gruppi viene stabilita tenendo conto delle capacità relazionali e di quelle relative alla disciplina.

Modalità di registrazione del lavoro da parte degli studenti

Ogni gruppo riceve una scheda con i problemi ed un foglio protocollo sul quale vengono riportate le soluzioni (risultati e procedure).
I componenti del gruppo si devono organizzare in modo che uno studente si dedichi alla stesura delle risoluzioni e tutti devono comunque collaborare, in base alle proprie attitudini, per individuare le soluzioni.

Numero unità orarie impiegate e loro consistenza

4 incontri di 50 minuti per il lavoro di gruppo
4 incontri di 50 minuti per la correzione e le osservazioni (classi separate)
1 incontro di 50 minuti per la premiazione e la conclusione dell'attività

Tipologia di verifica

L'attività consiste in una gara a gruppi.
Alla fine di ogni incontro vengono assegnati dei punteggi per ogni esercizio che sommati, determinano la graduatoria finale.

[3] I testi dei problemi sono stati tratti da LEONARDO SASSO **Matematica a colori – Corso di matematica per il biennio – Geometria** Petrini Editore Novara 2012

Descrizione attività

La formazione dei gruppi

Gruppo 1	due studenti 2ª H	due studenti 2ª A
Gruppo 2	due studenti 2ª H	due studenti 2ª A
Gruppo 3	due studenti 2ª H	due studenti 2ª A
Gruppo 4	due studenti 2ª H	due studenti 2ª A
Gruppo 5	due studenti 2ª H	due studenti 2ª A
Gruppo 6	uno studente 2ª H	due studenti 2ª A
Gruppo 7	due studenti 2ª H	due studenti 2ª A
Gruppo 8	uno studente 2ª H	tre studenti 2ª A
Gruppo 9	uno studente 2ª H	tre studenti 2ª A
Gruppo 10	due studenti 2ª H	due studenti 2ª A

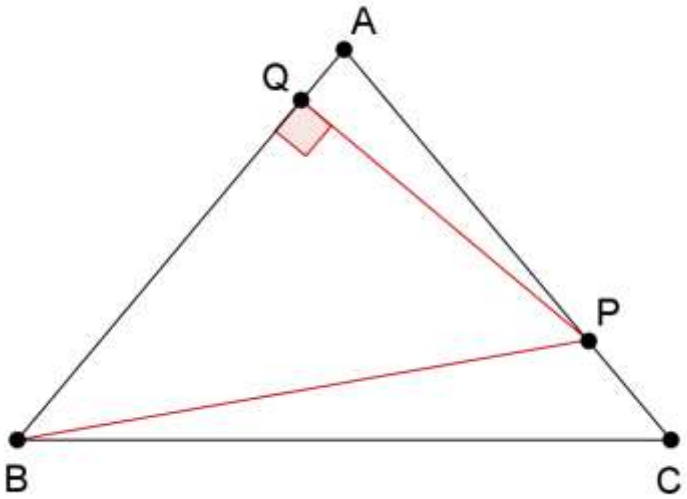
Attività svolte

Di seguito sono riportati il testo del problema, obiettivi, esiti e alcune considerazioni.

I problemi proposti sono stati raggruppati in 4 schede (con 5 problemi ciascuna) che sono riportate in APPENDICE

SCHEDA NUMERO 1 - Problema 1[4]

Osserva la figura.
Si sa che $AB \cong AC$, che PQ è per perpendicolare ad AB, che l'angolo $\widehat{BPC} = 120°$ e l'angolo $\widehat{ABP} = 50°$.
Quanto misura in gradi l'angolo $\widehat{PBC}$?



Conoscenze

- Somma degli angoli interni di un triangolo
- Proprietà del triangolo isoscele e rettangolo
- Teorema dell'angolo esterno

Obiettivi

- Saper calcolare le misure di angoli utilizzando, oltre ai dati del problema, le conoscenze sopra elencate

Percentuale di successo

- Il 60% arriva alla risposta corretta però di essi solo il 20% riesce a motivare bene i passaggi ed i vari calcoli citando teoremi e proprietà utilizzate
- Il 20% non svolge il quesito e un altro 20 % non riesce a concludere l'esercizio o per incompletezza o per errori di calcolo

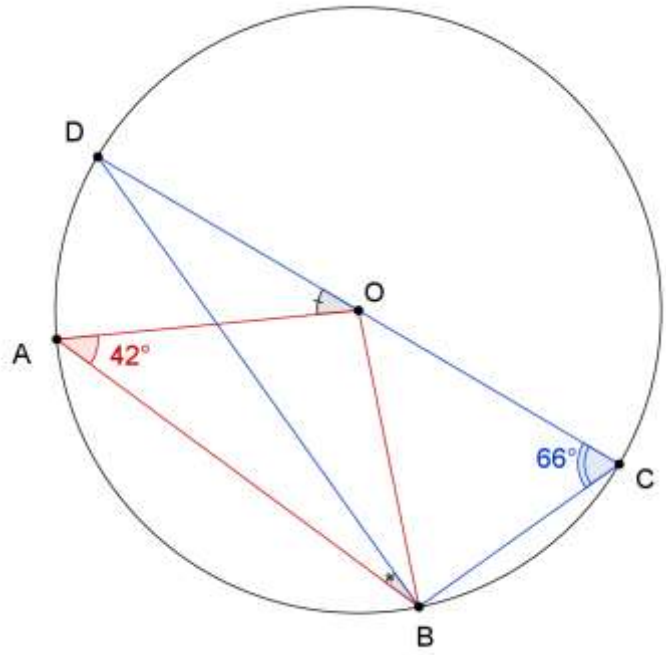
Considerazioni

In questo quesito erano molto interessanti le motivazioni dei vari passaggi mentre i calcoli non presentavano grosse difficoltà. Purtroppo la maggior parte dei gruppi non è stata in grado di motivare bene i calcoli svolti.

[4] Testo di riferimento pag. 159 n° 170

SCHEDA NUMERO 1 - Problema 2[5]

Nella figura qui sotto A, B, C, D sono punti della circonferenza di centro O. Sapendo che CD è un diametro della circonferenza, l'angolo $\widehat{OAB} = 42°$ e l'angolo $\widehat{OCB} = 66°$, determina le ampiezze degli angoli $A\hat{B}D$ e $A\hat{O}D$.



Conoscenze

- Angoli al centro e alla circonferenza e relativo teorema
- Angoli che insistono sullo stesso arco
- Angoli che insistono su una semicirconferenza

Obiettivi

- Saper calcolare le misure di angoli utilizzando, oltre ai dati del problema, le conoscenze sopra elencate

Percentuale di successo

- Il 30 % dei gruppi svolge correttamente motivando bene i vari passaggi
- Il 30% risolve senza motivare oppure svolge parzialmente il problema
- Il rimanente 40% non svolge il problema

Considerazioni

In questo problema, oltre alla difficoltà da parte loro di motivare i passaggi svolti, emerge anche il fatto che una percentuale consistente non svolge il quesito. Il motivo si può forse attribuire ad una difficoltà che hanno in generale i ragazzi nello studio delle proprietà geometriche relative alla circonferenza.

[5] Vedi testo di riferimento pag. 310 n° 108

SCHEDA NUMERO 1 - Problema 3[6]

Il perimetro di un triangolo equilatero è 18 $\sqrt{3}$ cm. Qual è l'area del cerchio inscritto?

Conoscenze

- Proprietà del triangolo equilatero
- Triangoli rettangoli con angoli acuti da 30° e 60°
- L'incentro e la circonferenza inscritta in un triangolo
- Proprietà del baricentro di un triangolo
- Triangoli simili

Obiettivi

- Risolvere il quesito recuperando e collegando le conoscenze sopra elencate

Percentuale di successo

- Solo il 20% riesce a risolvere il quesito in modo corretto seguendo due strade diverse
- Il 20 % svolge in modo errato il quesito
- Il 60 % non svolge il quesito

Considerazioni

Purtroppo questo problema, che si presentava molto ricco sia di conoscenze da recuperare che di procedimenti da impiegare, è stato svolto da pochi gruppi.

Sono state individuate almeno tre strade che potevano essere seguite:

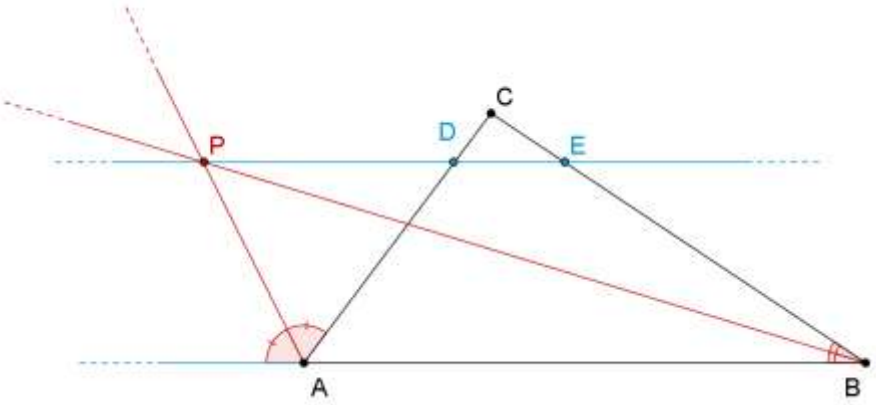
- utilizzare esclusivamente le proprietà del triangolo equilatero e del triangolo rettangolo con angoli acuti da 30° e 60°;
- utilizzare anche la proprietà del baricentro di un triangolo;
- utilizzare anche le conoscenze relative ai triangoli simili.

Dei due gruppi che hanno risolto correttamente il quesito, uno ha seguito la prima strada, l'altro la seconda.

[6] Vedi testo di riferimento pag. 550 n° 55

SCHEDA NUMERO 1 - Problema 4[7]

Nella figura qui sotto PA è la bisettrice dell'angolo esterno di vertice A del triangolo ABC, PB è la bisettrice dell'angolo interno di vertice B e dal punto di intersezione P di queste bisettrici è stata condotta la parallela alla retta AB che incontra i lati del triangolo in D e in E.
Determina la lunghezza di DE, sapendo che la lunghezza di AD è 2,5 cm e la lunghezza di EB è 4,5 cm.



Conoscenze

- Bisettrice di un angolo
- Proprietà del parallelismo
- Proprietà del triangolo isoscele

Obiettivi

- Utilizzare la geometria dimostrativa per ricavare relazioni
- Saper calcolare utilizzando le relazioni trovate

Percentuale di successo

- Solo il 20% riesce a risolvere il quesito in modo corretto svolgendo sia la dimostrazione che il calcolo
- Il 10 % svolge in modo corretto solo il calcolo senza la parte dimostrativa
- Il 70 % non svolge il quesito

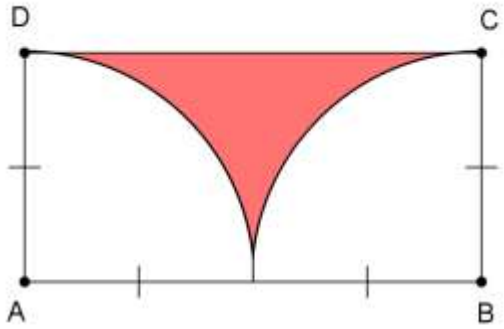
Considerazioni

Purtroppo anche questo problema, interessante perché conteneva oltre alla parte dimostrativa anche una parte di calcolo, è stato svolto da pochi gruppi.
Probabilmente molti studenti tendono a bloccarsi di fronte ad una dimostrazione.

[7] Vedi testo di riferimento pag. 158 n° 162

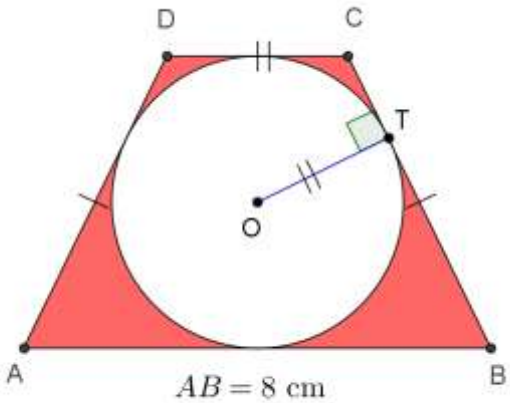
SCHEDA NUMERO 1 - Problema 5[8]

Determina le aree delle parti colorate nelle seguenti figure in base ai dati indicati sotto (i segmenti indicati con lo stesso simbolo sono congruenti).



AB = 8 cm

BC = 4 cm



$AB = 8$ cm

$CD = 2$ cm

Conoscenze

- Formule delle aree dei quadrilateri e del cerchio
- Proprietà di un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza
- Trapezio isoscele e proprietà
- Teorema della tangente
- Secondo teorema di Euclide

Obiettivi

Risolvere il quesito recuperando e collegando le conoscenze sopra elencate

Percentuale di successo

- Il 30% dei gruppi svolge in modo corretto il calcolo delle aree, ma di essi il 20% svolge i calcoli approssimando pi greco.
- Il 10 % svolge solo la prima parte del quesito
- Un altro 10 % svolge in modo errato i calcoli
- Il 50 % non svolge il quesito

Considerazioni

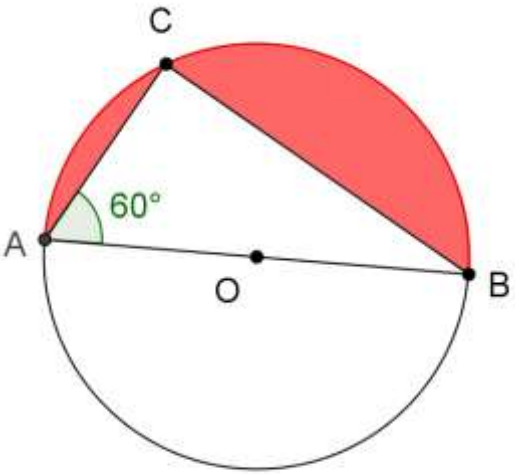
In generale in questo quesito i ragazzi si sono limitati a svolgere i calcoli senza motivare i passaggi o citare le varie proprietà.

È emersa una difficoltà con pi greco in quanto dalle scuole medie sono abituati ad approssimarlo con il valore 3,14.

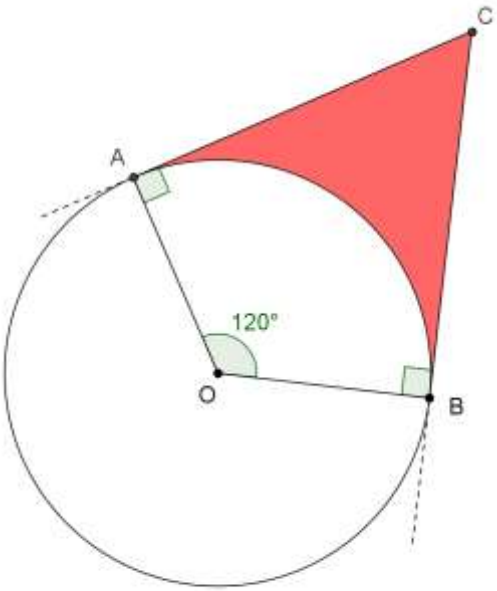
[8] Vedi testo di riferimento pag. 549 n° 53

SCHEDA NUMERO 1 - Problema 6[9]

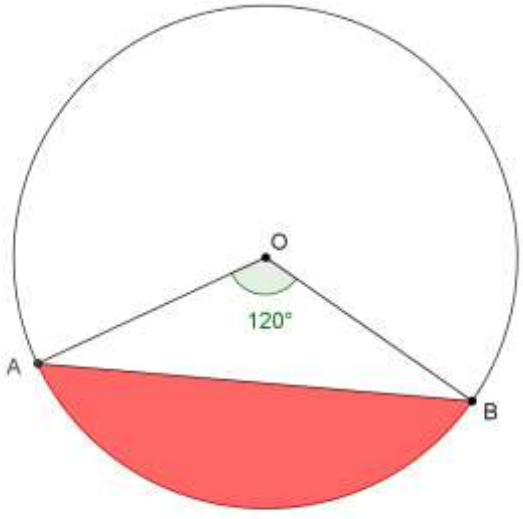
Determina le aree delle parti colorate nelle seguenti figure, conoscendo le lunghezze dei segmenti indicati.



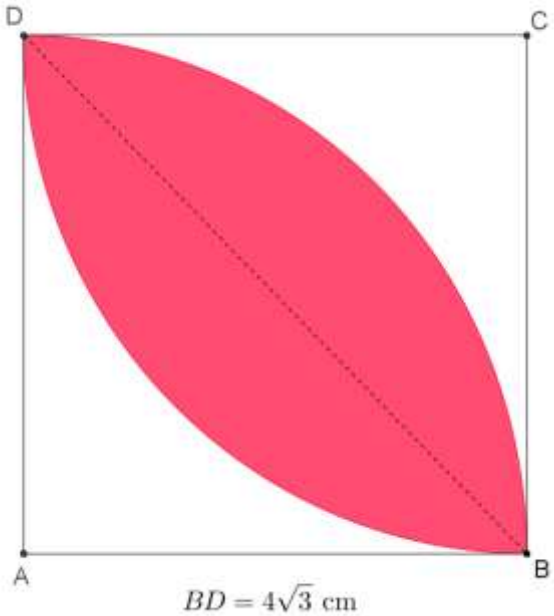
$BC = 4\sqrt{3}$ cm



$AC = 4\sqrt{3}$ cm



$AO = 4\sqrt{3}$ cm



$BD = 4\sqrt{3}$ cm

[9] Vedi testo di riferimento pag. 550 n° 54

Conoscenze

- Formule delle aree dei poligoni e del cerchio
- Triangolo inscritto in una semicirconferenza
- Triangoli rettangoli con angoli acuti da 30° e 60°
- Teorema della tangente

Obiettivi

- Risolvere il quesito recuperando e collegando le conoscenze sopra elencate

Percentuale di successo

- Il 70% dei gruppi non svolge il quesito o svolge in modo errato una minima parte.
- Il 10% svolge un quarto del quesito in modo corretto, un altro 10% svolge la metà del quesito, ed infine un 10% svolge i tre quarti del quesito
- Nessun gruppo svolge quindi totalmente tutto il problema. Chi svolge si limita a risolvere i calcoli

Considerazioni

- In generale il quesito, data la sua lunghezza, è stato svolto da pochi gruppi che si sono comunque limitati ai calcoli.
- Riteniamo opportuno specificare che nella quarta figura l'informazione che il quadrilatero ABCD fosse un quadrato e le curve dei quarti di circonferenza è stata data verbalmente agli studenti che, comunque, non si erano posti il problema in quanto spesso sono portati a dedurre queste informazioni direttamente dalla figura.

SCHEDA NUMERO 2 - Problema 1[10]

In un triangolo ABC scegliamo un punto D su AB e un punto E su AC in modo che la lunghezza di AD sia un terzo di quella di AB e la lunghezza di AE sia un terzo di quella di AC. Sapendo che l'area del triangolo ADE è 5 m^2, determinare l'area del quadrilatero BCED.

Conoscenze

- Secondo criterio di similitudine dei triangoli
- Rapporto tra le misure delle aree di triangoli simili

Obiettivi

- Saper riconoscere il secondo criterio di similitudine per i triangoli
- Utilizzare il rapporto di similitudine tra aree

Percentuale di successo

- Il 50 % dei gruppi è riuscito a risolvere il quesito

Considerazioni

Problema di semplice applicazione di conoscenze acquisite.
Metà degli studenti riconosce e applica i teoremi studiati in una situazione standard.
Un gruppo trascrive la soluzione ma non gli viene riconosciuta in quanto manca sia il disegno che qualsiasi spiegazione.
Tra coloro che sbagliano: un gruppo esegue una sottrazione tra grandezze non omogenee (misura dell'area a cui sottrae il quadrato del rapporto di similitudine), un gruppo disegna il triangolo rettangolo e non scaleno ponendosi quindi in una situazione particolare, ma poi non conclude i passaggi; gli altri gruppi non sanno applicare il rapporto di similitudine tra aree.

[10] Vedi testo di riferimento pag. 504 n° 284

SCHEDA NUMERO 2 - Problema 2[11]

Il perimetro di un esagono regolare è 12*l*. Determinare l'area del cerchio inscritto.

Conoscenze

- Poligoni inscritti e circoscritti
- Formule delle aree dei poligono regolari

Obiettivi

- Saper calcolare il raggio del cerchio inscritto in un esagono

Percentuale di successo

- Il 80 % dei gruppi è riuscito a risolvere il quesito

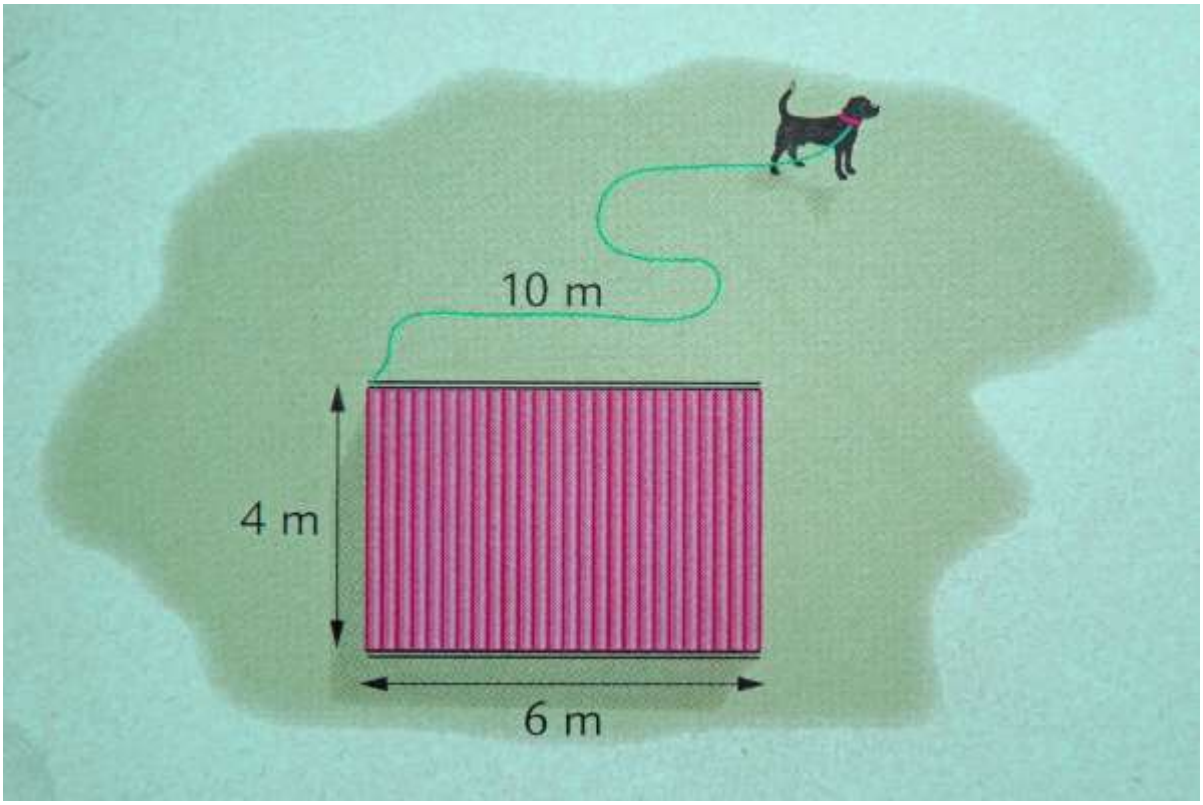
Considerazioni

Questo è un problema di semplice applicazione di conoscenze acquisite.
Quasi tutti gli studenti sanno calcolare il raggio della circonferenza inscritta in un esagono, i due gruppi che non giungono alla soluzione corretta in un caso risolvono trascurando la lettera *l* nel secondo trascrivono la soluzione ma manca sia il disegno che qualsiasi spiegazione.

[11] Vedi testo di riferimento pag. 550 n° 56

SCHEDA NUMERO 2 - Problema 3[12]

Osserva la figura qui sotto. Uno dei due estremi di una corda lunga 10 metri è fissato a un angolo di un capanno a pianta rettangolare di 4 metri per 6 metri, mentre all'altro estremo è legato un cane (che non può ovviamente entrare nel capanno). Qual è il perimetro della regione entro la quale può muoversi il cane?



Conoscenze

- Misura del perimetro della circonferenza

Obiettivi

- Saper fare un modello di una situazione reale
- Calcolare il perimetro come somma di perimetri di figure note

Percentuale di successo

- Il 80 % dei gruppi è riuscito a risolvere il quesito

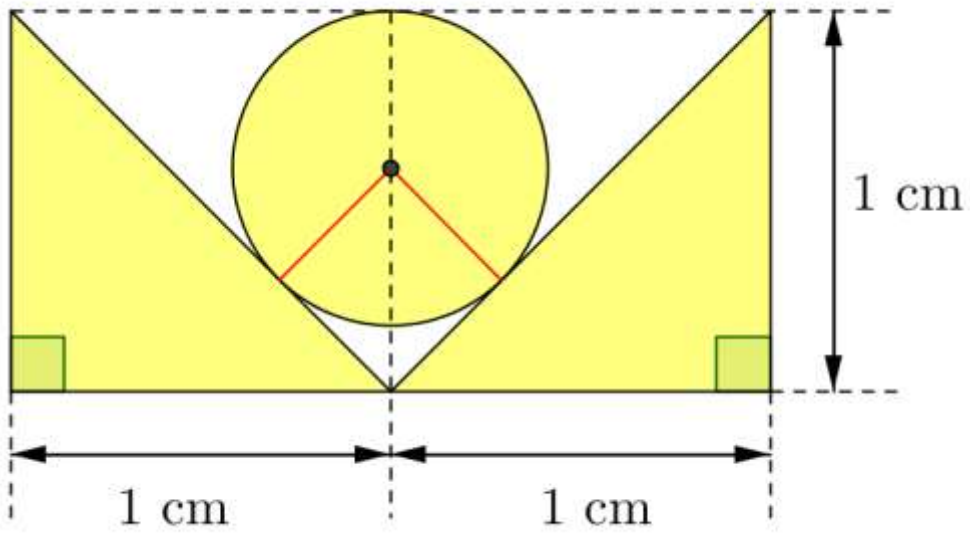
Considerazioni

Gli studenti si sono sentiti molto stimolati da questo quesito, tutti i gruppi lo hanno affrontato esibendo anche un disegno che rendeva più facile calcolare il perimetro del possibile percorso del cane. Solo un gruppo ha fatto un disegno parziale, non considerando le ultime piegature della corda, e un altro ha ragionato correttamente ma poi ha calcolato l'area della regione e non il perimetro.

[12] Vedi testo di riferimento pag. 553 n° 76

SCHEDA NUMERO 2 - Problema 4[13]

Determina l'area della parte colorata in giallo nella figura qui sotto, sapendo che il cerchio è tangente al lato del rettangolo e alle ipotenuse dei due triangoli rettangoli isosceli.



Conoscenze

- Figure simili
- Triangoli rettangoli isosceli
- Proprietà delle tangenti da un punto esterno ad una circonferenza

Obiettivi

- Saper riconoscere il teorema delle tangenti da un punto esterno ad una circonferenza
- Riconoscere che tutti i triangoli rettangoli isosceli sono simili
- Saper calcolare area di triangoli e circonferenze
- Saper impostare un'equazione per risolvere un problema geometrico

Percentuale di successo

- Nessun gruppo è riuscito a risolvere il quesito

Considerazioni

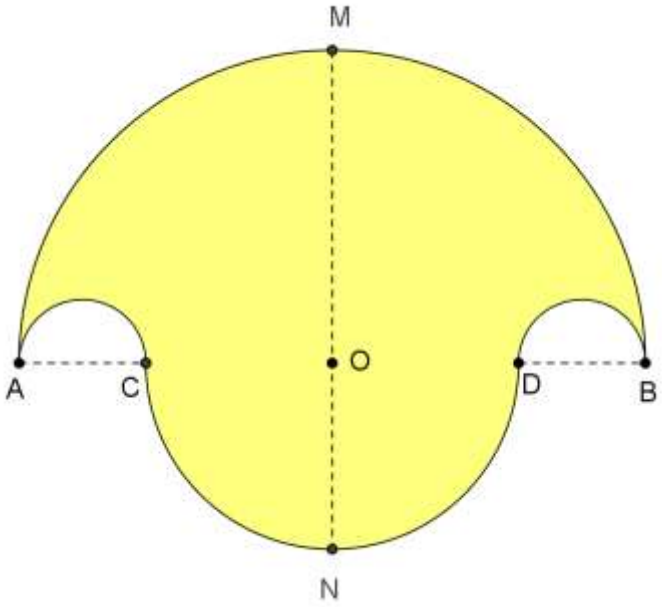
Gli studenti hanno fatto vari disegni congiungendo punti di tangenza, costruendo raggi in varie posizioni del cerchio, calcolando angoli; da questo si deduce che si sono sentiti molto stimolati. Purtroppo non sono riusciti a riconoscere nella figura geometrica i teoremi studiati o ad impostare la risoluzione del problema con una equazione.

Abbiamo notato che alcuni alunni hanno ripensato al quesito e sono stati in grado di fornire la soluzione in fase di correzione.

[13] Vedi testo di riferimento pag. 552 n° 73

SCHEDA NUMERO 2 - Problema 5[14]

Un'altra figura di cui si occupò Archimede è la cosiddetta saliera (Salinon), raffigurata qui sotto. Il contorno della figura è costituito da quattro semicirconferenze di diametri AB, AC, BD e CD. Supposto che $\overline{AC} = \overline{BD} = 2a$ e che $\overline{CD} = 2b$ dimostra che l'area della saliera è equivalente a quella del cerchio di diametro MN, essendo M e N i punti medi delle semicirconferenze di diametro AB e CD.



Conoscenze

- Misura dell'area delle circonferenza

Obiettivi

- Saper calcolare aree di figure effettuando somme e differenze di aree di circonferenze o semicirconferenze.
- Saper confrontare due termini di una relazione

Percentuale di successo

- Il 40 % dei gruppi è riuscito a risolvere il quesito

Considerazioni

Alcuni gruppi non hanno affrontato il quesito in quanto spaventati dal disegno, questi lo continuavano ad osservare nella sua complessità senza scomporlo in figure più semplici. Coloro che sono riusciti a risolverlo hanno ammesso che non era difficile la procedura ma solo un po' laborioso il calcolo, infatti due gruppi hanno fatto errori nel calcolo algebrico.

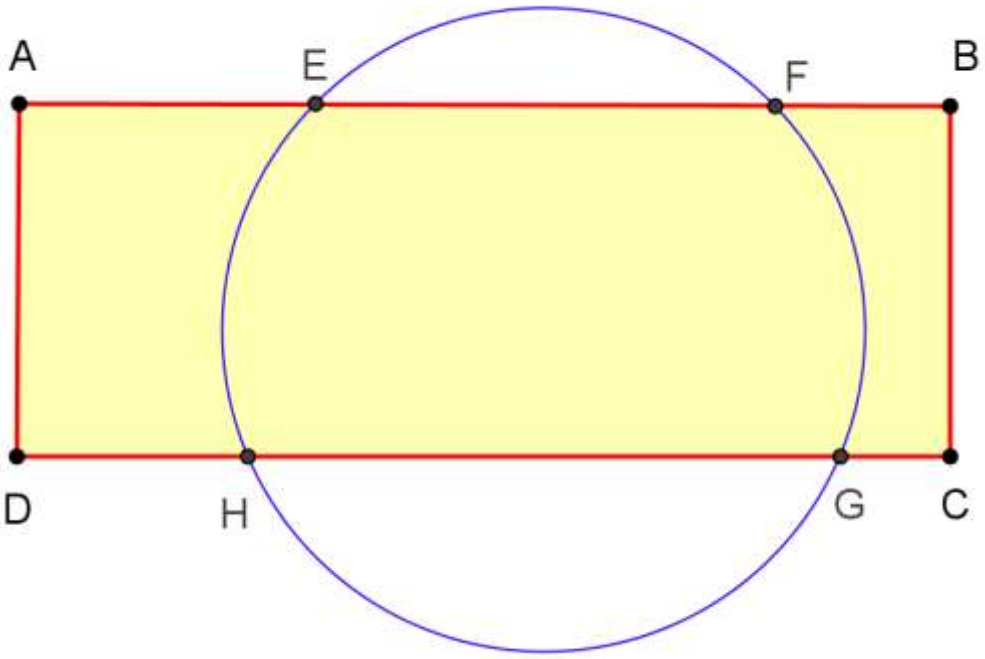
[14] Vedi testo di riferimento pag. 551 n° 66

SCHEDA NUMERO 3 – Problema 1[15]

Osserva la figura. Il rettangolo ABCD interseca la circonferenza nei punti E, F, G, H.

In metri, la lunghezza di AE vale 4, quella di EF vale 5 e quella di DH vale 3.

Quanto vale, in metri, la lunghezza di HG?



Conoscenze

- Proprietà dei quadrilateri
- Quadrilateri inscrivibili e inscritti in una circonferenza
- Parallelismo fra rette

Obiettivi

- Saper riconoscere le figure geometriche studiate e le loro proprietà

Percentuale di successo

- Il 90 % dei gruppi è riuscito a risolvere il quesito

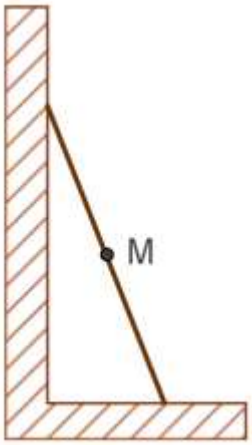
Considerazioni

Due gruppi eseguono correttamente i calcoli ma non motivano i passaggi.
Cinque gruppi mettono in evidenza che il trapezio è isoscele ma non aggiungono altro.
Solo due gruppi spiegano perché il trapezio è isoscele.

[15] Vedi testo di riferimento pag. 317 n° 180

SCHEDA NUMERO 3 – Problema 2[16]

Una sbarra metallica, che per semplicità supponiamo filiforme e il cui punto medio è denotato con M, è appoggiata in piedi contro un muro e aderisce a una parete con cui il muro fa angolo. Il muro e la parete sono di marmo molto lucido, per cui, lentamente la sbarra scivola, mantenendosi sempre aderente alla parete, fino ad adagiarsi sul pavimento (la figura schematizza la posizione della sbarra in un singolo istante durante il movimento: la parete è simboleggiata dal foglio). Che traiettoria descrive M sulla parete? Motiva la tua affermazione.



Conoscenze

- Concetto di luogo geometrico
- Proprietà della mediana in un triangolo rettangolo (inscrivibilità di un triangolo rettangolo in una semicirconferenza)

Obiettivi

- Saper rappresentare graficamente e in modo intuitivo la situazione problematica
- Riconoscere la proprietà del luogo geometrico
- Dimostrare e motivare la soluzione

Percentuale di successo

- Il 60 % degli studenti risponde correttamente alla domanda del quesito dicendo che **la traiettoria che descrive M sulla parete è un quarto di circonferenza**
- Il 30 % risponde in modo errato dicendo che **la traiettoria è un ramo di iperbole**
- Il 10 % risponde dicendo che **la traiettoria è di un quarto di raggio**; tuttavia si capisce dalla motivazione e dal grafico riportato che si tratta di un errore di sintassi e che quindi l'idea intuitiva della soluzione è corretta
- Per quanto riguarda invece la richiesta di **motivare l'affermazione**, solo il 20% riesce a spiegare in parte ma non richiama le proprietà studiate

Considerazioni

Particolarmente interessante e stimolante è stata la fase di correzione del quesito che è stata svolta in laboratorio di informatica con l'utilizzo del programma applicativo geogebra; gli alunni conoscono bene tale programma e nel corso del biennio hanno svolto delle attività che riguardano anche l'individuazione e la costruzione di luoghi geometrici.

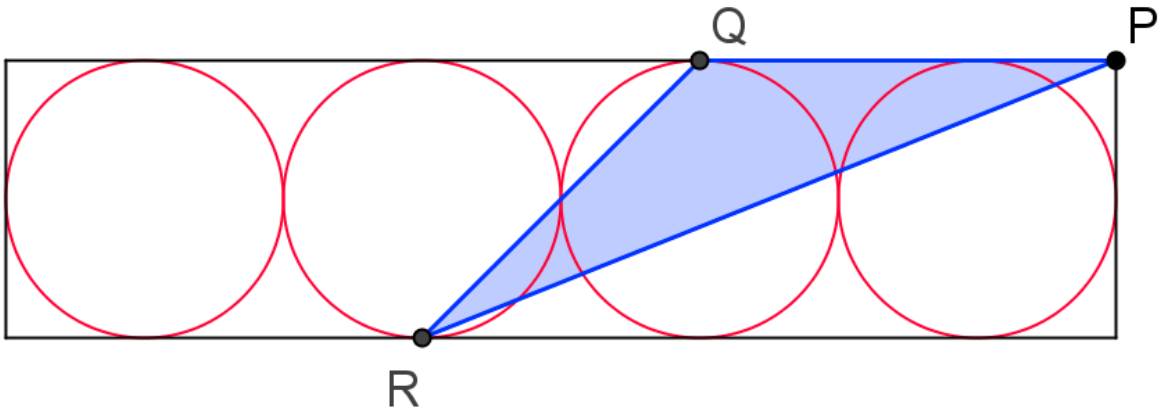
I ragazzi sono stati invitati a costruire un semplice modello per verificare la correttezza delle loro risposte.

La maggiore difficoltà di questa attività è stato quello di costruire un segmento (che rappresentava la sbarra metallica) di lunghezza costante e i cui estremi erano vincolati a muoversi lungo le due rette perpendicolari (che rappresentavano parete e pavimento). In parte autonomamente e in parte guidati dall'insegnante, quasi tutti (anche se con tempi diversi) sono riusciti a costruire il modello.

[16] Vedi testo di riferimento pag. 317 n° 182

SCHEDA NUMERO 3 – Problema 3[17]

Quattro cerchi congruenti di raggio 6 cm sono tangenti fra loro e ai lati del rettangolo come in figura. Se P è un vertice del rettangolo e Q e R sono punti di tangenza, quanti centimetri quadrati misura l'area del triangolo PQR?



Conoscenze

- Definizione di poligoni equivalenti
- Equivalenza tra triangoli
- Proprietà delle tangenti ad una circonferenza

Obiettivi

- Riconoscere triangoli equivalenti di data base
- Saper calcolare le aree dei poligoni (in particolare il triangolo)

Percentuale di successo

- Il 90 % dei gruppi arriva alla soluzione corretta ma con modalità diverse

Considerazioni

Un gruppo ha cercato di applicare direttamente la formula dell'area al triangolo PQR considerando come base RP ma, non riuscendo a trovare l'altezza ad essa relativa, si è bloccato.

Cinque gruppi hanno trovato l'area del triangolo PQR come differenza tra l'area del rettangolo di diagonale RP e quella di due triangoli rettangoli.

Un gruppo ha trovato l'area facendo la differenza tra l'area del rettangolo del disegno e quelle del trapezio rettangolo e del triangolo rettangolo.

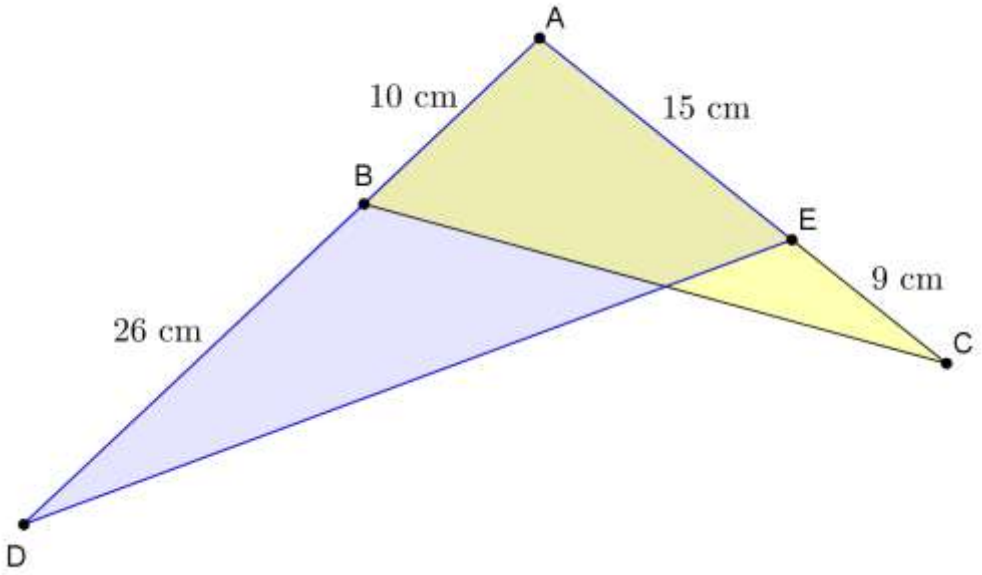
Tre gruppi hanno riconosciuto che si poteva lavorare con le informazioni del testo conoscendo la base e l'altezza

Si evidenzia la solita difficoltà nel vedere altezze perpendicolari non alla base ma al suo prolungamento.

[17] Vedi testo di riferimento pag. 388 n° 130

SCHEDA NUMERO 3 – Problema 4[18]

Qual è il rapporto delle aree dei triangoli ADE e ABC rappresentati nella figura qui sotto?



Conoscenze

- Criteri di similitudine dei triangoli
- Rapporto fra le aree di triangoli simili

Obiettivi

- Riconoscere triangoli simili utilizzando uno dei criteri di similitudine studiato
- Saper calcolare il rapporto di similitudine dei lati di un triangolo e quindi delle loro aree

Percentuale di successo

- Il 40 % dei gruppi riesce a risolvere correttamente il quesito anche se il 10 % di essi non spiega in modo esauriente la similitudine dei due triangoli
- Il 20 % non svolge correttamente il quesito
- Il 40% pur arrivando a calcolare correttamente il rapporto delle aree, aggiunge un'ipotesi non data dal testo ovvero che i due triangoli sono rettangoli

Considerazioni

L'errore più ricorrente relativo al quesito riguarda il fatto che, basandosi sulla figura gli alunni hanno considerato i due triangoli rettangoli mentre in realtà questa non è un ipotesi del quesito.

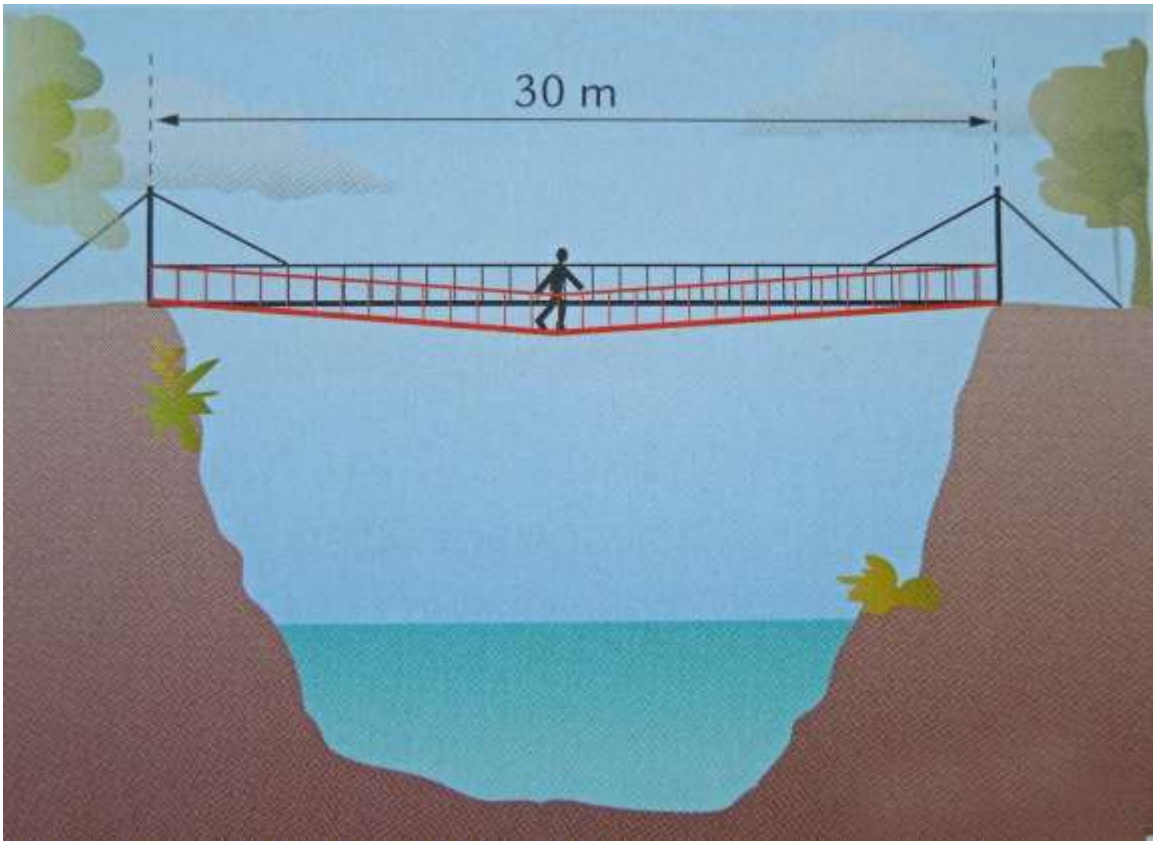
Tali gruppi, per calcolare il rapporto richiesto, svolgono il calcolo delle aree dei triangoli rettangoli aventi come base e altezza i due cateti.

Abbiamo considerato erronea la soluzione in quanto gli studenti non la hanno utilizzata come proprietà valida in un certo insieme di situazioni ma hanno risolto il problema solo perché il triangolo per loro era rettangolo!

[18] Vedi testo di riferimento pag. 556 n° 16

SCHEDA NUMERO 3 – Problema 5[19]

Un ponte sospeso risulta perfettamente teso quando nessuno è sul ponte e in tal caso la sua lunghezza è uguale a 30 metri, mentre si allunga di 20 centimetri sotto il peso di una persona che si trova esattamente a metà del ponte.
Di quanto si è abbassato il punto posto a metà del ponte sotto il peso della persona?



Conoscenze

- Il teorema di Pitagora

Obiettivi

- Saper utilizzare il teorema di Pitagora in situazioni problematiche legate alla realtà,
- Saper approssimare le soluzioni

Percentuale di successo

- Il 70 % dei gruppi svolge correttamente il quesito ed arriva alla soluzione corretta
- Il 10 % non svolge il quesito
- Il 20 % svolge il quesito ma commette qualche errore di calcolo o di approssimazione

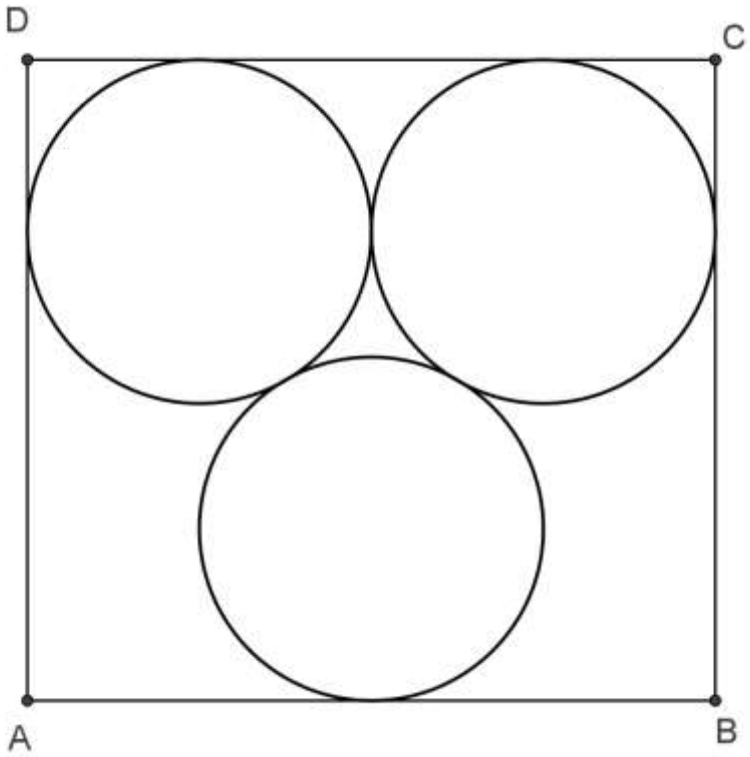
Considerazioni

Il risultato positivo mette in evidenza una certa familiarità con il teorema di Pitagora ed una capacità di riconoscerlo in situazioni reali. Probabilmente questo deriva anche dal fatto che alla scuola media gli alunni hanno lavorato con problemi di questo genere

[19] Vedi testo di riferimento pag. 439 n° 3

SCHEDA NUMERO 4 – Problema 1[20]

I tre cerchi nella seguente figura hanno tutti raggio di lunghezza 4 cm, sono tangenti tra di loro e ai lati del rettangolo ABCD. Quali sono le lunghezze dei lati del rettangolo ABCD?



Conoscenze

- Proprietà di rette tangenti ad una circonferenza
- Proprietà di circonferenze tangenti
- Triangolo equilatero e teorema di Pitagora

Obiettivi

- Saper riconoscere e utilizzare le proprietà delle circonferenze tangenti
- Applicare il teorema di Pitagora

Percentuale di successo

- Il 30% dei gruppi è riuscito a risolvere il quesito

Considerazioni

Due gruppi eseguono correttamente il problema.

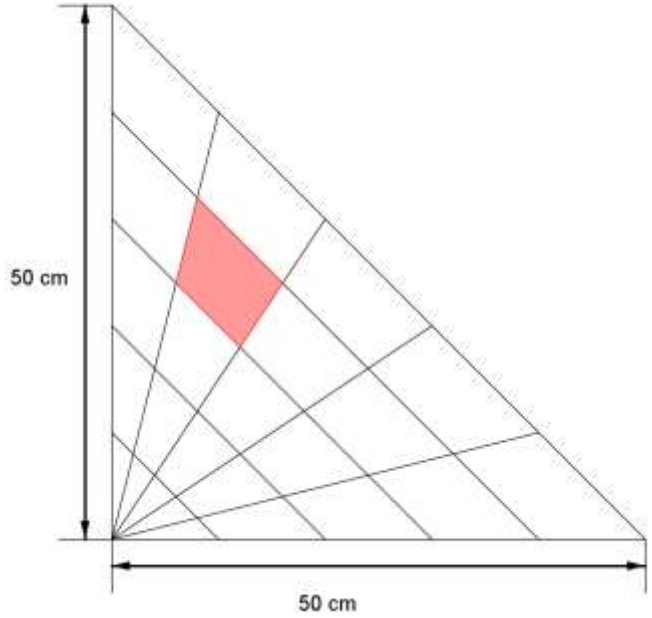
Un gruppo procede correttamente ma approssima all'intero il risultato quando avevamo chiarito, fin dal primo incontro, che era importante lavorare mantenendo le radici.

Questo quesito è stato considerato molto difficile dagli studenti in quanto, pur conoscendo le proprietà relative alle circonferenze tangenti, o non sono riusciti a disegnare correttamente il triangolo equilatero che si ottiene unendo i centri delle tre circonferenze o non hanno avuto l'idea di tracciarlo.

[20] Vedi testo di riferimento pag. 430 n° 173

SCHEDA NUMERO 4 – Problema 2[21]

Nel triangolo rettangolo isoscele disegnato qui accanto, ogni lato è stato diviso in cinque segmenti congruenti. Determina l'area della regione colorata, sapendo che ciascun cateto è lungo 50 cm.



Conoscenze

- Proprietà del triangolo rettangolo isoscele
- Poligoni equivalenti
- Teorema di Talete
- Trapezio

Obiettivi

- Riconoscere un trapezio
- Riconoscere l'altezza di un trapezio
- Riconoscere figure equivalenti
- Saper calcolare l'area del trapezio

Percentuale di successo

- Solo il 10 % degli studenti risponde correttamente alla domanda del quesito dividendo per cinque l'area del trapezio isoscele che contiene l'area colorata
- Il 30 % determina la misura delle basi del trapezio colorato ma non riesce a trovare l'altezza.
- Gli altri trovano solo le misure dei lati del triangolo di partenza

Considerazioni

Quesito considerato di notevole difficoltà, pochi hanno riconosciuto il trapezio pur conoscendo la sua definizione ma si sono lasciati sviare dai lati obliqui, (con inclinazioni "strane") senza capire che non avevano alcuna influenza sulla risoluzione.

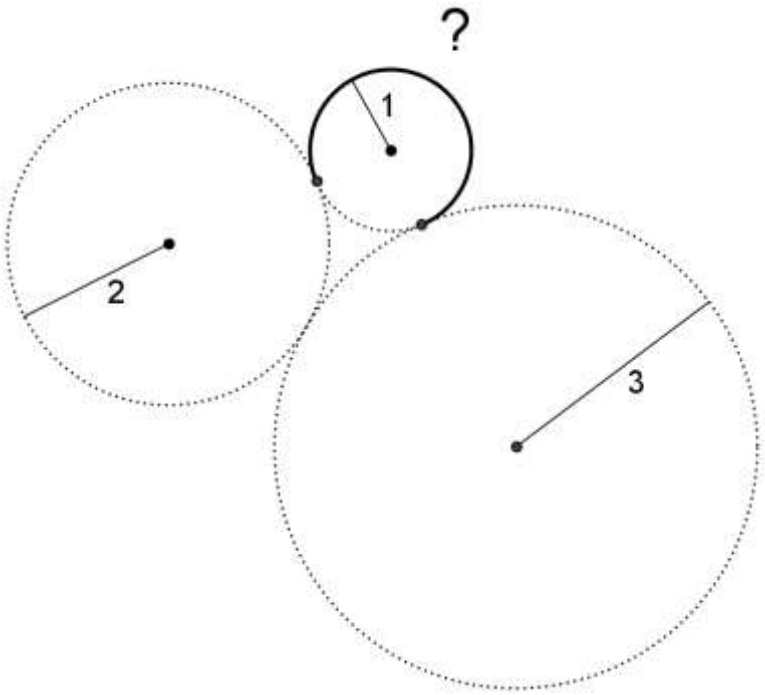
Altra difficoltà, usuale per gli studenti, è stata quella di riconoscere l'altezza come distanza tra due rette parallele.

Interessante la domanda di uno studente durante il lavoro: "solo i lati sono divisi in 5 segmenti congruenti o anche l'ipotenusa?" Questo ci ha fatto riflettere sul fatto che spesso arrivano agli studenti messaggi distorti perché le parole che noi insegnanti utilizziamo rimandano a significati diversi.

[21] Vedi testo di riferimento pag. 437 n° 16

SCHEDA NUMERO 4 – Problema 3[22]

In figura sono rappresentate tre circonferenze a due a due tangenti esternamente; i raggi hanno le misure indicate. Quanto è lungo l'arco della circonferenza di raggio 1 indicato in grassetto, avente come estremi due dei punti di tangenza?



Conoscenze

- Proprietà di circonferenze tangenti
- Teorema di Pitagora e terne pitagoriche
- Misura della lunghezza di una circonferenza

Obiettivi

- Saper riconoscere e utilizzare le proprietà delle circonferenze tangenti
- Utilizzare il teorema di Pitagora per verificare se un triangolo è rettangolo
- Riconoscere la proporzionalità tra angolo al centro e arco corrispondente
- Saper calcolare la misura della lunghezza di una circonferenza

Percentuale di successo

- Il 20 % dei gruppi è riuscito a risolvere il quesito

Considerazioni

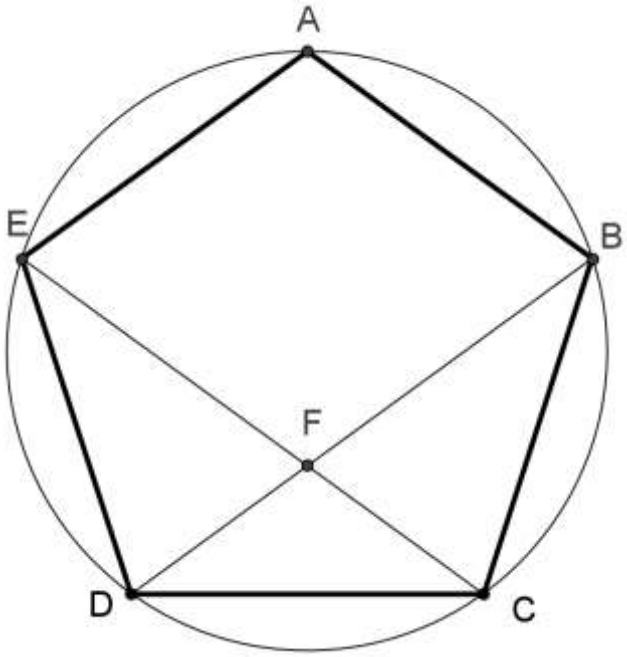
Un gruppo esegue correttamente il problema spiegando i vari passaggi e quindi riconoscendo il triangolo rettangolo, l'altro gruppo scrive il risultato esatto senza motivare o dare spiegazioni, forse osservando il disegno riesce a ricavare che l'arco richiesto corrisponde ai ¾ di circonferenza.
La difficoltà, di nuovo, è completare la figura in modo adeguato non solo congiungendo i centri ma anche riconoscendo che sono allineati, a due a due, con i punti di tangenza.

[22] Vedi testo di riferimento pag. 553 n° 77

SCHEDA NUMERO 4 – Problema 4[23]

Nella figura qui sotto è disegnato un pentagono regolare ABCDE e F è il punto di incontro delle diagonali EC e BD.

Determina le ampiezze degli angoli dei triangoli EFD, DFC e del quadrilatero ABFE.



Conoscenze

- Poligoni regolari e proprietà
- Somma angoli interni dei poligoni
- Angoli supplementari e opposti al vertice
- Angoli che insistono su archi congruenti

Obiettivi

- Saper calcolare la misura degli angoli interni in un pentagono regolare
- Scomporre una figura in parti anche sovrapposte
- Riconoscere triangoli isosceli e proprietà degli angoli

Percentuale di successo

- Il 70 % dei gruppi è riuscito a risolvere il quesito

Considerazioni

Il quesito è stato considerato facile, quelli che lo hanno sbagliato o hanno considerato un esagono al posto del pentagono o hanno considerato la somma degli angoli interni di 360° generalizzando quella dei quadrilateri.

Tutti coloro che hanno risolto in modo corretto, dopo aver calcolato l'angolo interno del pentagono, hanno utilizzato la somma degli angoli interni di un triangolo per effettuare i calcoli successivi; nessun gruppo ha citato le proprietà degli angoli alla circonferenza.

[23] Vedi testo di riferimento pag. 347 n° 109

SCHEDA NUMERO 4 – Problema 5[24]

Priscilla è stata incaricata di preparare la scenografia per la recita della scuola. Ha bisogno di una falce di luna, e ha a disposizione un cerchio di cartone di raggio r in cui ritagliarla; allora punta il compasso sul bordo del cerchio , disegna una circonferenza di raggio $r\sqrt{2}$ e taglia lungo la linea tracciata. Quanto vale l'area della falce di luna che si ottiene?

Conoscenze

- Misura dell'area delle circonferenza
- Misura della diagonale del quadrato

Obiettivi

- Saper calcolare la misura di aree non note per differenza di aree note
- Saper riconoscere il lato del quadrato inscritto in una circonferenza

Percentuale di successo

- Nessun gruppo è riuscito a risolvere il quesito

Considerazioni

Tutti i gruppi che hanno tentato la risoluzione di questo quesito si sono scontrati con la difficoltà di fare un disegno esatto. Pur conoscendo la relazione tra lato e diagonale di un quadrato non sono riusciti ad inserirla in questa situazione vedendo il raggio come lato del quadrato inscritto.

Il problema è non considerare la $\sqrt{2}$ come diagonale del quadrato ma come numero da approssimare , cioè pressappoco più lungo del raggio e forse non aver interiorizzato il concetto di numero irrazionale.

[24] Vedi testo di riferimento pag. 553 n° 78

Commento degli studenti sull'attività

Al termine dell'attività, agli alunni delle due classi è stato somministrato un questionario di gradimento il cui testo è riportato in fondo al fascicolo. Il questionario è stato compilato da 38 alunni su 39.

Nella prima parte l'alunno, per ogni voce riportata, doveva segnare con una croce un numero da 1 a 5 (1 per niente d'accordo … 5 molto d'accordo).

Nella seguente tabella è riportato il numero di quanti alunni hanno scelto un determinato livello di gradimento.

GIUDIZIO SUL LAVORO DI GRUPPO

	1	***2***	***3***	***4***	***5***
Formazione dei gruppi	1	3	12	**15**	7
Collaborazione	0	3	**17**	13	6
Competitività	5	**13**	6	**11**	3
Partecipazione personale	1	1	7	**22**	7

GIUDIZIO SUI PROBLEMI PROPOSTI

	1	***2***	***3***	***4***	***5***
Chiarezza del testo	0	1	11	**14**	12
Numero di esercizi in rapporto al tempo a disposizione	0	6	**20**	9	3
Livello di difficoltà adeguato	0	**2**	**21**	13	2
Stimolanti	2	4	**17**	10	5
Noiosi	4	**24**	7	2	1
Utili all'apprendimento	0	3	14	**16**	5

Nella seconda parte del questionario, l'alunno era invitato a rispondere a delle domande.

Riportiamo i seguenti risultati:

*Domanda **C.*** **Ricordi un problema più interessante di altri? Quale?**

21 alunni hanno risposto "il problema del cane" (scheda 2 quesito n° 3), 6 alunni hanno risposto " il problema della saliera " (scheda 2 quesito n° 5), due alunni hanno scelto il quesito n° 4 della scheda 2.
Tre alunni hanno risposto in generale "i quesiti dell'ultima scheda". Un alunno ha citato il "problema della sbarra" (scheda 3 quesito n° 2), infine quattro alunni non hanno indicato nessun problema.

*Domanda **D.*** **Dove hai trovato maggiori difficoltà?**

11 alunni rispondono " nei problemi dell'ultima scheda"
Altre risposte ricorrenti sono le seguenti:
" nel ricordare i teoremi dell'anno scorso " (6 alunni)
" nei problemi con le circonferenze e/o i poligoni inscritti e circoscritti " (6 alunni)
" nel trascrivere i procedimenti" (3alunni)

*Domanda **E.*** **Cosa hai trovato di molto facile?**

10 alunni rispondono " i problemi sul calcolo degli angoli "
Altre risposte ricorrenti sono le seguenti:
"niente o solo pochi esercizi " (6 alunni)
" il problema del ponte " (4 alunni) (scheda 2 quesito n° 5)
" i problemi con i triangoli " (2 alunni)
"il problema dei due triangoli simili" (2 alunni) (scheda 2 quesito 1)

*Domanda **F.*** **Ti sei sentito stimolato alla conoscenza?**

22 alunni rispondono " sì", 15 alunni rispondono "abbastanza" e un alunno risponde "no, per niente".
Alcuni alunni scrivono :" Sì, perché dopo aver fatto la correzione riuscivo a ricordarmi bene i teoremi che erano presenti".

*Domanda **G.*** **Ti sei demotivato?**

30 alunni rispondono "no", 4 alunni rispondono "poco".
Altre risposte sono interessanti perché manifestano un disagio personale di qualche alunno:
" a volte sì perché non riuscivo a farne nemmeno uno", "un po' all'inizio perché non riuscivo a collaborare",
" molto spesso visto che gli altri compagni si conoscevano meglio".
Altra risposta interessante : " no perché era un gioco e tutto quello che riuscivo a capire e a svolgere era qualcosa in più"

*Domanda **H.*** **Ti è capitato di ripensare successivamente alla risoluzione di un quesito?**

29 alunni rispondono " sì", 9 rispondono "no".

*Domanda **I.*** **Qual è stato l'aspetto più interessante dell'esperienza?**

27 alunni scrivono delle risposte riconducibili all'aspetto socializzante dell'esperienza. Alcune delle più significative sono le seguenti:

" lavorare assieme ad un'altra classe", "conoscere i pensieri diversi", "collaborare", "cooperare", "conoscere nuovi compagni", "fare problemi assieme", "confrontarsi con persone di altre classi", "condividere le conoscenze matematiche con compagni di altre classi", "aiutarsi gli uni gli altri", "capire come ragionano gli altri compagni", "conoscere altre persone e poter confrontare il mio livello"...

Altre risposte interessanti sono le seguenti:

"applicare assieme le conoscenze di due anni" (2 alunni)

"divertirsi con esercizi di matematica" (2 alunni)

"la correzione in classe" (2 alunni)

"i disegni"

" fare problemi in generale e non solo mirati all'argomento appena svolto a scuola"

*Domanda **J.*** **Qual è stato l'aspetto meno interessante dell'esperienza?**

21 alunni o non rispondono oppure scrivono "nessuno"

Altre risposte interessanti sono le seguenti:

"quando c'erano problemi simili (*ripetitivi*)" (4 alunni) (es: scheda 1 quesito n° 6)

"alcuni problemi difficili e/o noiosi " (5 alunni)

"essere d'accordo anche se non si è capito nulla" (2 alunni)

"non sentirsi in competizione" (2 alunni)

*Domanda **K.*** **Ti sembra che l'esperienza ti abbia dato una buona possibilità di metterti alla prova sulle conoscenze acquisite nella geometria del biennio?**

28 alunni rispondono "sì", 7 alunni rispondono "abbastanza".

Altre risposte interessanti sono le seguenti:

"sì, ho trovato delle difficoltà che poi ho eliminato"

"non tanto, erano problemi strani"

" sì anche se i problemi di questa attività di solito non li facciamo in classe"

*Domanda **L.*** **Quali suggerimenti daresti per migliorare l'attività?**

14 alunni suggeriscono di mettere meno problemi nelle schede, o di "fare l'esperienza per due ore di seguito" o di "fare due incontri alla settimana"

8 alunni non rispondono o scrivono "nessuno"; tre alunni scrivono "va bene così"

Altre risposte interessanti sono le seguenti:

"mettere problemi di vari livelli di difficoltà" (3 alunni)

"dare problemi più facili" (3 alunni)

"invogliare il lavoro di gruppo"

"maggiore preparazione della classe prima degli incontri"

"alternare l'algebra alla geometria"

"fare gruppi più equilibrati"

*Domanda **M.*** **In generale quale giudizio daresti all'attività svolta?**

21 alunni esprimono un voto o un giudizio sintetico che nella media si aggira attorno al **buono**.

Altri giudizi interessanti sono i seguenti:

" l'esperienza è stata interessante perché potevi confrontarti con altri ragazzi" (3 alunni)

"è stata un'esperienza bella e divertente" (5 alunni)

"è stata un'esperienza positiva, mi piacerebbe ripeterla anche il prossimo anno" (2 alunni)

"è una buona attività che ti aiuta a fare ragionamenti non solo individuali e che ti fa applicare le conoscenze di due anni" (2 alunni)

"interessante, educativa, piacevole e divertente" (2 alunni)

"bella alternativa alle lezioni normali" (2 alunni)

Commento delle insegnanti sull'attività

Le schede

La parte del lavoro che ci ha impegnate maggiormente è stata quella relativa alla scelta dei quesiti per le quattro schede. Sia perché volevamo scegliere quesiti che toccassero tutti i principali argomenti trattati in questi due anni, sia perché volevamo quesiti accattivanti e diversi dai soliti problemi. Inoltre dovevano essere anche non banali, che facessero ragionare gli alunni e discutere in gruppo e, non per ultimo, risolvibili nel tempo a loro disposizione.

E' proprio questo aspetto, il tempo, che ci ha messe più in difficoltà, e che è risultato, anche dal punto di vista degli studenti, l'anello più debole dell'esperienza.

La prima scheda infatti è sembrata troppo lunga. I quesiti contenuti erano troppi e alcuni eccessivamente estesi perché divisi in più parti. In questa fase i ragazzi dovevano anche conoscersi ed organizzare il lavoro decidendo i vari compiti e quindi sarebbe stato più opportuno ridurre i quesiti. D'altro canto è stata anche per noi una fase di rodaggio nel senso che, non avendo mai fatto esperienze di questo tipo, non sapevamo bene cosa aspettarci. I risultati di questa scheda sono stati modesti e i ragazzi hanno svolto alcuni quesiti senza curare la spiegazione dei procedimenti applicati.

Questa fase è stata comunque molto importante perché ci ha permesso di formulare meglio le schede successive e di ridefinire con loro le richieste iniziali; in particolare abbiamo dovuto insistere sull'importanza di come venivano scritte le spiegazioni delle soluzioni ai vari problemi.

Nella **seconda scheda**, così come nelle successive abbiamo quindi inserito 5 quesiti.

Essa, sia dal punto di vista nostro che degli studenti, è stata la più interessante per i problemi contenuti. Inoltre i risultati sono migliorati rispetto a quelli della scheda precedente.

La **terza scheda** è quella che ha dato i migliori risultati in termini di numero di quesiti risolti da ciascun gruppo.

La **quarta scheda**, infine, è stata inaspettatamente ritenuta molto difficile dagli alunni ed i risultati sono stati inferiori rispetto a quelli delle due schede precedenti. Dal nostro punto di vista ha giocato un ruolo determinane anche il fatto che il quarto incontro si è svolto negli ultimi giorni di scuola e abbiamo notato negli studenti un calo di motivazione ed interesse per l'attività.

Riportiamo di seguito la tabella con i punteggi assegnati alle dieci squadre nei vari incontri.

Punteggi

n° Gruppo	Punteggio scheda n°1 (punteggio max 10)	Punteggio scheda n°2 (punteggio max 9)	Punteggio scheda n°3 (punteggio max 10)	Punteggio scheda n°4 (punteggio max 11)	TOTALI
Gruppo n°1	2	3	7	2,5	14,5
Gruppo n°2	2	3,5	7	2,5	15
Gruppo n°3	2	6	6,5	2,5	17
Gruppo n°4	4	4	4	4	16
Gruppo n°5	4,5	7	8,5	5	25
Gruppo n°6	4	3,5	8	3	18,5
Gruppo n°7	2	6	9	7	24
Gruppo n°8	3,5	4	7	0,5	15
Gruppo n°9	3	3	6	3	15
Gruppo n°10	3	4	6,5	3,5	17

I gruppi

La formazione dei gruppi è risultata complessivamente positiva; tutti i gruppi hanno lavorato con impegno, non ci sono stati scontri o momenti di incomprensione fra i loro membri.

Tuttavia ci sono stati dei gruppi che ci sono sembrati meglio riusciti di altri sia per come si sono amalgamati fra loro sia per come si sono organizzati al loro interno. Purtroppo nel gruppo da tre alunni (due di seconda A e uno di seconda H), non si è creata una buona intesa fra le due classi: i due alunni di seconda A, molto motivati ed affiatati hanno lavorato bene ma non sono riusciti a coinvolgere l'alunno di seconda H che è partito meno motivato e disposto a mettersi in gioco.

In altri gruppi, a volte abbiamo notato una suddivisione in due sottogruppi da due che hanno lavorato parallelamente su quesiti diversi.

Altre considerazioni

In generale abbiamo notato che l'attività è stata accolta con entusiasmo fin dall'inizio e i vari incontri erano molto attesi dagli alunni.

In particolare ci ha colpito il fatto che, più che l'aspetto della competizione, loro abbiano apprezzato i risvolti socializzanti dell'iniziativa.

Un altro risultato positivo è che molti di loro hanno dichiarato di aver ripensato ai quesiti anche dopo l'incontro. Questo ci conferma il fatto che gli alunni si sono sentiti stimolati al ragionamento.

Un esempio da citare è quello relativo al quesito 4 della scheda 2. Sebbene nessun gruppo sia riuscito a risolverlo, tuttavia alcuni alunni ci hanno ripensato e, in fase di correzione, sono arrivati con la soluzione pronta. Tale quesito è stato citato anche nel questionario come uno dei più interessanti.

Un altro aspetto interessante che forse gli alunni non hanno messo in evidenza, se non in rari casi, è la presenza di figure colorate nei vari problemi. Dal nostro punto di vista questo è stato un ulteriore elemento che ha reso più stimolante l'attività.

Ci hanno colpito anche alcune risoluzioni di quesiti che noi non avevamo previsto; questo ribadisce l'importanza in attività di questo tipo di lasciare agli alunni la libertà di scegliere la strada da percorrere senza dare troppi vincoli o suggerimenti.

L'aspetto meno positivo riscontrato è stato la difficoltà che loro hanno nel motivare i passaggi quando devono risolvere un problema. Per il tipo di attività proposta non siamo però riuscite a capire se questo sia dovuto ad una "pigrizia" che loro hanno nello spiegare , ad una mancanza di tempo o ad una effettiva difficoltà. Possiamo ipotizzare che nella matematica lo studente sia più concentrato sui risultati che sulle procedure.

L'ultima considerazione che vorremmo fare riguarda la documentazione del lavoro svolto.

Spesso si è portati a trascurare questa fase di revisione finale in quanto di dà maggiore importanza al lavoro fatto in classe. Ci siamo accorte che il fatto di dover raccontare in modo dettagliato l'attività svolta è stato per noi molto stimolante e un momento di forte riflessione proprio per valorizzare e migliorare l'attività con gli studenti.

Analizzare ogni problema non solo per valutarne la risoluzione ma chiedendoci se il testo era chiaro, se le nostre informazioni venivano realmente comprese, se il linguaggio utilizzato era effettivamente condiviso, se il tempo a disposizione era sufficiente; oppure, osservare il comportamento degli alunni durante il lavoro, prendere appunti su eventuali domande e riflessioni e quindi raccogliere tutte queste informazioni per presentarle in modo organico ci ha dato la possibilità di valutare in modo puntuale il nostro lavoro di insegnanti per riconoscerne meglio gli aspetti positivi, da valorizzare, e quelli negativi da correggere.

In conclusione questo lavoro non si limita a raccontare ma raccoglie tante considerazione che faranno da "ponte" per proseguire e migliorare il nostro lavoro

Questioni aperte

Pensando alla possibilità di ripetere l'esperienza ci chiediamo quali possano essere gli aspetti da modificare. Ci siamo poste le seguenti domande, le cui risposte rimangono però ancora aperte.

A. Ci vorrebbe una verifica finale?

No, perché è già un'attività di verifica.

Sì, perché bisogna verificare quanto questa attività abbia inciso su ciascun alunno.

B. Sarebbe meglio una gara fra classi?

No, perché verrebbe meno l'aspetto socializzante che loro hanno apprezzato molto.

Sì, perché aumenterebbe la competizione.

C. Gli incontri dovrebbero essere di due ore?

No, perché in due ore potrebbero annoiarsi ed è sufficiente adeguare il numero di esercizi.

Sì, perché gli studenti si sono lamentati de aver poco tempo disposizione.

D. Le schede dovrebbero essere più strutturate in modo da costringere gli alunni attraverso delle domande a motivare bene i loro ragionamenti?

No, perché è bene che si abituino ad essere autonomi; inoltre a volte le spiegazioni date dal loro possono essere inaspettate e sorprendenti.

Sì perché sarebbe più chiara la consegna.

E. Potrebbe essere più interessante dare a ciascun gruppo un solo problema da analizzare a fondo?

No, perché potrebbe essere noioso.

Sì, perché si abituano a spiegare e motivare in modo accurato ogni passaggio.

Epilogo

Collegio docenti del Liceo L. da Vinci" di Trento del 15 giugno 2012
Durante la pausa …

F.: Pensa che ieri sera mi sono messa a leggere i questionari degli alunni della 2H. Dalle risposte mi sono sembrati entusiasti!

M.: Anch'io le ho lette quelle di 2A ed effettivamente hanno apprezzato l'attività; ci sono alcuni commenti molto interessanti.

F.: Leggendole mi sono venute tante idee …

M.: … e l'entusiasmo di ripetere l'esperienza.

F.: Magari potremmo pensare a qualche variazione.

M: Bene, potremmo trovarci per fare un bilancio e decidere come proporla il prossimo anno.

F.: Intanto, chiediamo alla Vicepreside che preveda nel nostro orario delle ore contemporanee in 2A e 2G.

M.: D'accordo. Speriamo di poter ripetere un'esperienza ricca di stimoli e motivante...

Allegati

LE SCHEDE

E

IL QUESTIONARIO DI GRADIMENTO

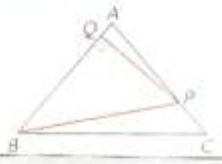
Classi 2SA/H ANNO SCOLASTICO 2011/12 Martedì 28 febbraio 2012

ATTIVITA' A GRUPPI CON LA GEOMETRIA

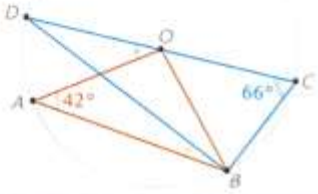
SCHEDA NUMERO 1

Per ciascuno dei seguenti problemi, dopo aver letto attentamente il testo, discutere e ricavare in gruppo la soluzione. Scrivere in modo esauriente e chiaro la spiegazione dei vari passaggi sul foglio protocollo.

1. Osserva la figura. Si sa che $AB \cong AC$, che PQ è perpendicolare ad AB, che l'angolo $B\hat{P}C$ misura 120° e l'angolo $A\hat{B}P$ misura 50°. Quanto misura in gradi l'angolo $P\hat{B}C$?

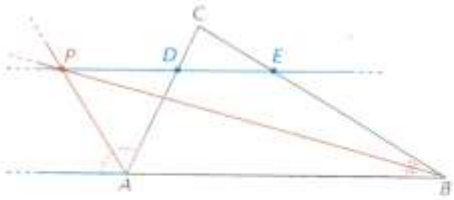


2. Nella figura qui sotto A, B, C, D sono punti della circonferenza di centro O. Sapendo che CD è un diametro della circonferenza, $O\hat{A}B = 42°$ e $O\hat{C}B = 66°$, determina le ampiezze degli angoli $A\hat{B}D$ e $A\hat{O}D$.



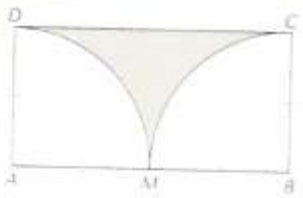
3. Il perimetro di un triangolo equilatero è $18\sqrt{3}$ cm. Qual è l'area del cerchio inscritto?

4. Nella figura qui sotto PA è la bisettrice dell'angolo esterno di vertice A del triangolo ABC, PB è la bisettrice dell'angolo interno di vertice B e dal punto d'intersezione P di queste bisettrici è stata condotta la parallela alla retta AB che incontra i lati del triangolo in D e in E.

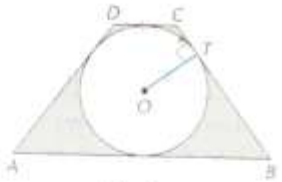


Determina la lunghezza di DE, sapendo che la lunghezza di AD è 2,5 cm e la lunghezza di EB è 4,5 cm.

5. Determina le aree delle parti colorate nelle seguenti figure, in base ai dati indicati sotto (i segmenti indicati con lo stesso simbolo sono congruenti).



$AB = 8$ cm
$BC = 4$ cm

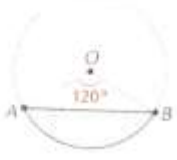


$AB = 8$ cm
$CD = 2$ cm

Determina le aree delle parti colorate nelle seguenti figure, conoscendo le lunghezze dei segmenti indicati.

$BC = 4\sqrt{3}$ cm

$AC = 4\sqrt{3}$ cm



$AO = 4\sqrt{3}$ cm

$BD = 4\sqrt{3}$ cm

Classi 2SA/H ANNO SCOLASTICO 2011/12 Martedì 27 marzo 2012

ATTIVITA' A GRUPPI CON LA GEOMETRIA

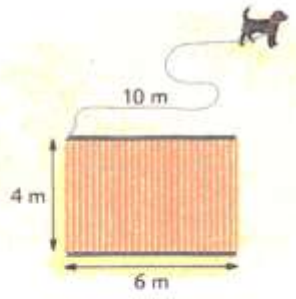
SCHEDA NUMERO 2

Per ciascuno dei seguenti problemi, dopo aver letto attentamente il testo, discutere e ricavare in gruppo la soluzione. Scrivere in modo esauriente e chiaro la spiegazione dei vari passaggi sul foglio protocollo.

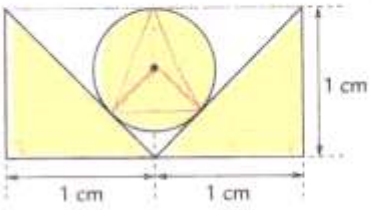
1. In un triangolo ABC scegliamo un punto D su AB e un punto E su AC in modo che la lunghezza di AD sia un terzo di quella di AB e la lunghezza di AE sia un terzo di quella di AC. Sapendo che l'area del triangolo ADE è 5 m^2, determinare l'area del quadrilatero $BCED$.

2. Il perimetro di un esagono regolare è $12l$. Determina l'area del cerchio inscritto. $[3\pi l^2]$

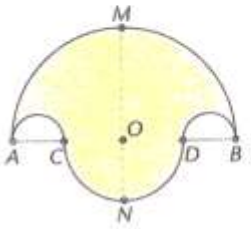
3. Osserva la figura qui sotto.
Uno dei due estremi di una corda lunga 10 metri è fissato a un angolo di un capanno a pianta rettangolare di 4 metri per 6 metri, mentre all'altro estremo è legato un cane (che non può ovviamente entrare nel capanno).
Qual è il perimetro della regione entro la quale può muoversi il cane?



4. Determina l'area della parte colorata in giallo nella figura qui sotto, sapendo che il cerchio è tangente al lato del rettangolo e alle ipotenuse dei due triangoli rettangoli isosceli.



5.
Un'altra figura di cui si occupò Archimede, , è la cosiddetta saliera («Salinon»), raffigurata qui sotto. Il contorno della figura è costituito da quattro semicirconferenze, di diametri AB, AC, BD e CD. Supposto che $\overline{AC} = \overline{BD} = 2a$ e $\overline{CD} = 2b$, dimostra che l'area della saliera è equivalente a quella del cerchio di diametro MN, essendo M e N i punti medi delle semicirconferenze di diametri AB e CD.



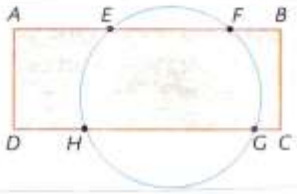
Classi 2SA/H ANNO SCOLASTICO 2011/12 Martedì 24 aprile 2012

ATTIVITA' A GRUPPI CON LA GEOMETRIA

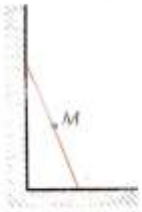
SCHEDA NUMERO 3

Per ciascuno dei seguenti problemi, dopo aver letto attentamente il testo, discutere e ricavare in gruppo la soluzione. **Scrivere in modo esauriente e chiaro la spiegazione dei vari passaggi sul foglio protocollo.**

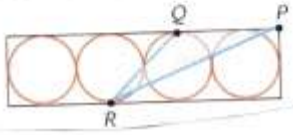
1. Osserva la figura. Il rettangolo $ABCD$ interseca la circonferenza nei punti E, F, G, H. In metri, la lunghezza di AE vale 4, quella di EF vale 5 e quella di DH vale 3. Quanto vale, in metri, la lunghezza di HG?



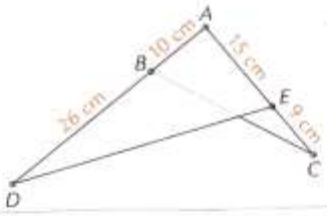
2. Una sbarra metallica, che per semplicità supponiamo filiforme e il cui punto medio è denotato con M, è appoggiata in piedi contro un muro e aderisce a una parete con cui il muro fa angolo. Il muro e la parete sono di marmo molto lucido, per cui lentamente la sbarra scivola, mantenendosi sempre aderente alla parete, fino ad adagiarsi sul pavimento (la figura schematizza la posizione della sbarra in un singolo istante durante il movimento: la parete è simboleggiata dal foglio). Che traiettoria descrive M sulla parete? Motiva la tua affermazione.



3. Quattro cerchi congruenti di raggio 6 cm sono tangenti tra loro e ai lati del rettangolo come in figura. Se P è un vertice del rettangolo e Q e R sono punti di tangenza, quanti centimetri quadrati misura l'area del triangolo PQR?

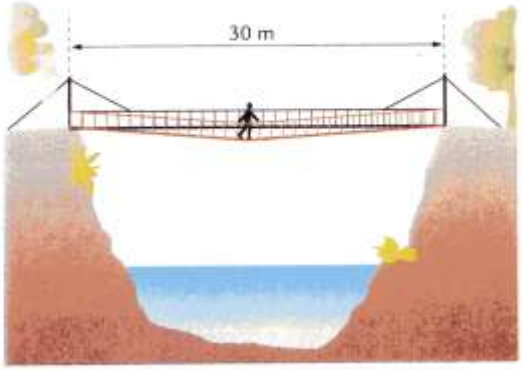


4. Qual è il rapporto delle aree dei triangoli ADE e ABC rappresentati nella figura qui sotto?



5.

Un ponte sospeso risulta perfettamente teso quando nessuno è sul ponte e in tal caso la sua lunghezza è uguale a 30 metri, mentre si allunga di 20 centimetri sotto il peso di una persona che si trova esattamente a metà del ponte.



Di quanto si è abbassato il punto posto a metà del ponte sotto il peso della persona?

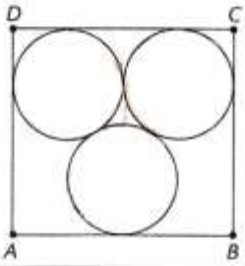
Classi 2SA/H ANNO SCOLASTICO 2011/12 Martedì 29 maggio 2012

ATTIVITA' A GRUPPI CON LA GEOMETRIA

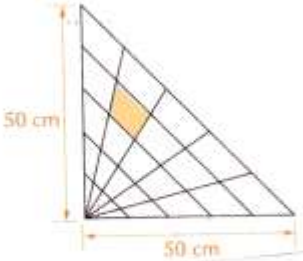
SCHEDA NUMERO 4

Per ciascuno dei seguenti problemi, dopo aver letto attentamente il testo, discutere e ricavare in gruppo la soluzione. **Scrivere in modo esauriente e chiaro la spiegazione dei vari passaggi sul foglio protocollo.**

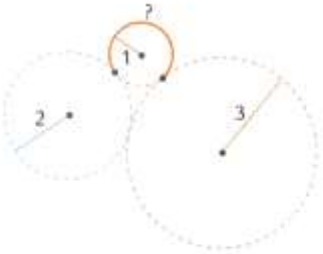
1. I tre cerchi nella seguente figura hanno tutti raggio di lunghezza 4 cm, sono tangenti tra di loro e ai lati del rettangolo *ABCD*. Quali sono le lunghezze dei lati del rettangolo *ABCD*?



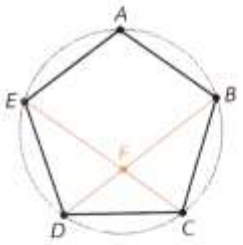
2. Nel triangolo rettangolo isoscele disegnato qui sotto, ogni lato è stato diviso in cinque segmenti congruenti. Determina l'area della regione colorata, sapendo che ciascun cateto è lungo 50 cm. [70 cm²]



3. In figura sono rappresentate tre circonferenze a due a due tangenti esternamente; i raggi hanno le misure indicate. Quanto è lungo l'arco della circonferenza di raggio 1 indicato in grassetto, avente come estremi due dei punti di tangenza?



4. Nella figura qui sotto è disegnato un pentagono regolare *ABCDE* e *F* è il punto d'intersezione delle diagonali *EC* e *BD*.



a. Determina le ampiezze degli angoli dei triangoli *EFD*, *DFC*, e del quadrilatero *ABFE*.

5. Priscilla è stata incaricata di preparare la scenografia per la recita della sua scuola. Ha bisogno di una falce di luna, e ha a disposizione un cerchio di cartone di raggio r in cui ritagliarla; allora punta il compasso sul bordo del cerchio, disegna un arco di circonferenza di raggio $r\sqrt{2}$ e taglia lungo la linea tracciata. Quanto vale l'area della falce di luna che si ottiene?

Classi 2SA/H ANNO SCOLASTICO 2011/2012 giugno 2012

ATTIVITA' A GRUPPI CON LA GEOMETRIA
QUESTIONARIO DI GRADIMENTO

6. Indica con una croce (1 per niente d'accordo … 5 molto d'accordo)

A. Giudizio sul **lavoro di gruppo**

a) Formazione dei gruppi	1	2	3	4	5
b) Collaborazione	1	2	3	4	5
c) Competitività	1	2	3	4	5
d) Partecipazione personale	1	2	3	4	5

B. Giudizio sui **problemi** proposti

a) Chiarezza nel testo	1	2	3	4	5
b) Numero di esercizi in rapporto al tempo a disposizione	1	2	3	4	5
c) Livello di difficoltà adeguato	1	2	3	4	5
d) Stimolanti	1	2	3	4	5
e) Noiosi	1	2	3	4	5
f) Utili all'apprendimento	1	2	3	4	5

7. Rispondi alle seguenti domande:

C. Ricordi un problema più interessante di altri? Quale?.....
….....
D. Dove hai trovato maggiore difficoltà?.....
….....
E. Cosa hai trovato di molto facile?.....
….....
F. Ti sei sentito stimolato alla conoscenza?.....
….....
G. Ti sei demotivato?.....
….....
H. Ti è capitato di ripensare successivamente alla risoluzione di un quesito?.....
….....
I. Qual è stato l'aspetto più interessante dell'esperienza?.....
….....
J. Quale il meno interessante?.....
….....
K. Ti sembra che l'esperienza ti abbia dato una buona possibilità di metterti alla prova sulle conoscenze acquisite nella geometria del biennio?.....
….....
L. Quali suggerimenti daresti per migliorare l'attività?.....
….....
M. In generale quale giudizio daresti all'attività svolta?.....
….....

Problem solving di geometria

Renata Paoli, Liceo "B. Russell" – Cles

Scheda riassuntiva

Classi coinvolte

Classi IIC e IID del liceo delle scienze applicate del Liceo Russell di Cles, oltre al gruppo di alunni del corso di approfondimento di geometria del secondo quadrimestre (formato su scelta volontaria da alunni di tutte le seconde scientifico scienze applicate e del corso normale di liceo scientifico)

Numero di alunni per classe

- IIC 15 alunni
- IID 20 alunni
- gruppo di approfondimento 27 alunni

Periodo dell'anno

Nelle due classi del liceo delle scienze applicate per l'intero anno scolastico per una/due ore settimanali; per il gruppo di approfondimento solo per un periodo di circa tre mesi per un totale di 22 ore (compresa la verifica) divise in 11 lezioni da due ore di 50' ciascuna

Argomenti trattati

sempre con il supporto di geogebra e da aprile anche di cabri3D

Classi II C e D: è stato svolto il programma curriculare di geometria (a grandi linee circonferenze, equivalenze, similitudini, geometria solida) con una particolare attenzione ai problemi sia di geometria sintetica con dimostrazioni, sia a problemi di geometria con l'applicazione dell'algebra (in particolare con l'uso dei teoremi di Pitagora ed Euclide e con i teoremi sulla similitudine) sia nella geometria piana che in quella solida con semplici problemi di calcolo di volumi e superfici
In contemporanea, a partire da ottobre, sono stati analizzati i problemi di **flatlandia** sia risolvendo quelli degli anni passati, sia partecipando alle gare di quest'anno (con molti alunni che hanno spedito le risoluzioni personali al sito).

Per il gruppo di approfondimento (avendo alunni di diversi classi e quindi con una base di conoscenze di geometria non sempre buona) si è pensato di mescolare le due cose risolvendo in parte problemi semplici di **flatlandia** ed in parte problemi di geometria con l'algebra. Per circa metà delle ore si è invece lavorato con Cabri 3D per esaminare e/o dimostrare proprietà dei tetraedri e delle piramidi in generale, per sezionare solidi e per disegnare sviluppi.

Obiettivi di apprendimento

- Portare avanti il programma di geometria per le classi seconde
- Potenziare l'uso e la conoscenza dei software dinamici per l'insegnamento/apprendimento della geometria piana e solida;
- Potenziare e/o sviluppare la capacità di risoluzione di problemi di ogni tipo legati alla geometria
- Eseguire figure con Geogebra che contenessero precise misure e costruzioni, in modo da sviluppare maggiormente le conoscenze in ambito teorico
- Potenziare e approfondire l'uso dei software dinamici di geogebra e Cabri 3D
- Stimolare autonomia e passione per lo studio della geometria in generale anche come supporto agli studi del triennio

Modalità di lavoro

Classi II C e D:

La maggior parte del tempo è stato trascorso in laboratorio di informatica davanti ai PC (singolarmente, ogni alunni con il suo PC), tranne che per il lavoro a casa di esercitazione con problemi, dove non vi fosse l'esplicita richiesta di eseguire la figura al calcolatore.

Altre ore invece sono state spese in classe per sistemare in maniera più rigorosa la parte teorica di quanto appreso in aula di informatica (per esempio nel caso di dimostrazioni di teoremi)

Nel caso di risoluzione di alcuni problemi di Flatlandia più complessi si è scelta la modalità di lavorare in gruppo, sempre in laboratorio dove eseguire le figure con geogebra; per il resto delle attività si è sempre cercato di far si che gli alunni si sforzassero di lavorare autonomamente. Solo in caso di estrema difficoltà si è permesso loro di usufruire dell'aiuto di uno dei compagni più dotati.

Gruppo di approfondimento:

Tutto il tempo è stato trascorso in aula di informatica, anche per gestione di spazi e numero degli alunni; comunque l'attività è stata impostata nello stesso modo di quella nelle altre due classi seconde, pertanto un alunno per ogni pc, seguendo il lavoro dell'insegnante alla lavagna interattiva, cercando di replicare le parti complesse, completando poi in autonomia la parte restante dell'attività. Per la parte conclusiva del corso (ultimi due appuntamenti di due ore ciascuno) dove ogni alunno doveva ricevere una valutazione complessiva, si è fatto uso di due schede di lavoro che guidassero i ragazzi e sulla base delle quali si è espresso un voto da riportare poi in pagella finale

Modalità di registrazione del lavoro da parte degli studenti

Classi II C e D:

Si è lavorato con due modalità diverse in base all'attività da svolgere:

- Per le parti di teoria l'insegnante sullo schermo grande (visibile da tutti) eseguiva l'attività passo-passo, (anche ripetendo le parti più complesse) scrivendo poi i vari commenti alla figura sullo stesso foglio (oppure dopo aver inserito la figura in un foglio di word, si aggiungevano i commenti a seguire);
- Ogni alunno alla fine della lezione aveva svolto l'intera attività prevista come tutti i suoi compagni;
- Ognuno procedeva alla stampa del foglio che andava poi conservato nel quaderno in quanto poi oggetto di interrogazione o verifica.
- Ogni figura eseguita dall'alunno veniva salvata nella cartella personale dell'alunno stesso; a random l'insegnante controllava l'esattezza della figura costruita.
- Per le parti di risoluzione di problemi simili a quelli delle schede allegate, l'insegnante apriva una figura già fatta sullo schermo grande e l'alunno autonomamente doveva replicarla (con le misure e/o le proprietà dettate) e quindi risolvere il problema annesso. In caso di problemi troppo complessi, dopo i suggerimenti dell'insegnante e/o di qualche compagno, l'intera classe era in grado di completare il lavoro.
- Anche tale foglio di lavoro con la figura e la risoluzione scritta a fianco (quasi sempre su un foglio di word), veniva poi stampato e raccolto dall'alunno e quindi conservato in un quaderno apposito, in modo da avere a fine anno una raccolta di problemi di geometria a cui attingere per esercitarsi in vista delle prove scritte

Per quanto riguarda il gruppo di approfondimento, per ogni lavoro svolto veniva stampato il foglio (simile a quello delle classi seconde) e raccolto in un quaderno da ogni alunno.

Numero unità orarie impiegate e loro consistenza

Classi 2D e 2C in totale circa 55 ore da 50 minuti; mentre per il corso di approfondimento 22 ore complessive

Tipologia di verifica

Classi 2D e 2C:

Sono state effettuate 4 prove scritte (2 per quadrimestre) presenti nell'allegato; tutte le prove avevano la durata di 50'e sono state svolte in laboratorio di informatica. Durante le interrogazioni orali è stata richiesta la risoluzione di problemi in cui applicare i teoremi di Pit, Euc, Talete……, ma alla lavagna e senza il supporto del software, per ovvi motivi di tempo.

Gruppo di approfondimento:

Sono state somministrate due prove di carattere meno teorico, che contenessero semplici attività di costruzioni di figure (circa la metà degli alunni non aveva mai usato i software di geometria in questione) e di loro analisi, ma anche con qualche calcolo. Vista l'orario di svolgimento delle lezioni le prove effettuate hanno avuto maggior durata, ovvero circa 70'; per il tempo restante si sono approfonditi altri aspetti delle attività presenti nelle schede delle prove.

Esiti delle verifiche

Corso di approfondimento

55% Buono, 15% Discreto, 30% Sufficiente

Classi 2D e 2C

37.5 % Buono, 31% Discreto, 6 % Sufficiente, 20% insufficiente circa

Valutazione dell'attività

In generale tutti gli alunni sembrano aver apprezzato le attività proposte e aver adeguatamente partecipato ad esse attivamente e quasi sempre con esiti positivi. Conforta il risultato del test per le competenze (preparato dal dipartimento dell'Istituto) nel quale i quesiti di geometria praticamente per l'intero gruppo ha avuto esito più che positivo con una media del 74% di risposte corrette, più alto nettamente delle altre classi dello stesso tipo. Nel corso del triennio si valuterà poi se tali competenze permarranno più solidamente che nel passato, ma comunque l'attività è risultata piacevole ed una sfida accattivante, anche se impegnativa, pure per l'insegnante.

E' mia intenzione riproporre tale modalità di lavoro anche per il prossimo biennio con la futura classe prima che avrò l'anno prossimo, nonché proseguire su questa linea per affrontare i contenuti di terza per le classi attuali, con l'uso dei software per i luoghi geometrici in analitica e per le funzioni in analisi, e per tutto lo sviluppo della geometria solida.

Descrizione attività

Raccolta di prove di valutazione

PROVA NOVEMBRE

Classi Seconde C e D (tempo di svolgimento 1 unità oraria di 50' in aula di informatica)

Ogni costruzione eseguita va salvata, solamente quando è finita, sulla cartella indicata dall'insegnante

Le risposte vanno scritte sul foglio a quadretti allegato al testo della prova.

1 Costruisci-disegna il luogo geometrico dei centri delle circonferenze passanti tutte per due punti fissi A e B. Salva il file come es1. Rispondi quindi alle domande:

   a. Elenca in ordine cronologico e sinteticamente cosa hai disegnato.
   b. Cos'è il luogo richiesto e perché?

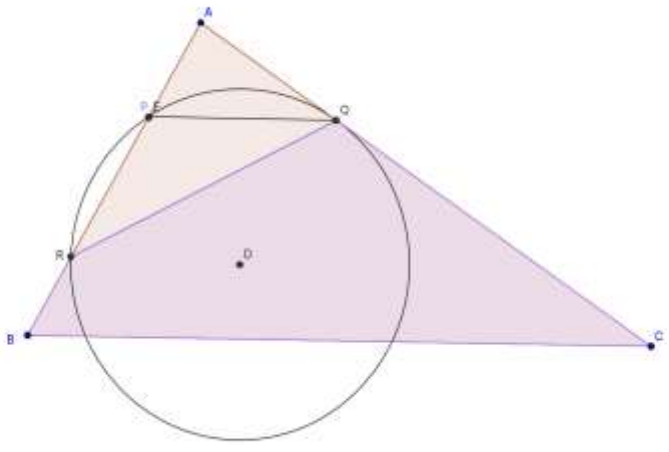
2 Costruisci-disegna il luogo geometrico dei centri delle circonferenze tangenti contemporaneamente a due rette parallele a e b date. Salva il file come es 2.

3 Costruisci la circonferenza passante per tre punti A, B e C dati, fra loro non allineati.

4 Disegna un triangolo ABC e sul segmento AB prendi un punto P (più vicino ad A che a B). Per esso traccia la parallela a BC e sia Q l'intersezione con AC. Costruisci la circonferenza passante per P e Q e *tangente ad AC in Q* (…il centro della circonferenza deve essere sull'asse del segmento…….. e sulla retta perpendicolare…….). Detta circonferenza interseca AB in un ulteriore punto R.

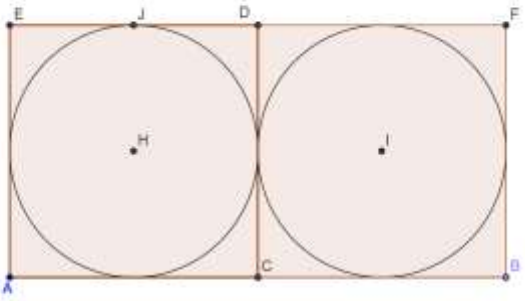
   a. Misura gli angoli PRQ, AQP e ACB. Essi sono …….. Perché?
   b. Misura gli angoli APQ, ABC e AQR. Essi sono …… Perché?
   c. Costruisci il quadrilatero BCQR. Dimostra che esso è inscrivibile in una circonferenza.

Disegno di massima che deve risultare e che ovviamente non è consegnato agli alunni



PROVA gennaio-febbraio Classi Seconde C e D

Problema 1: Osserva la figura e completa le frasi successive:



Il quadrilatero ACDE è un ……perché…….

……

Conoscendo la misura del segmento HD = , calcola quindi la misura del raggio

Il raggio misura…….perché……

Che relazione c'è fra il raggio delle circonferenze e il lato del rettangolo?.....

Quindi il perimetro del rettangolo è……

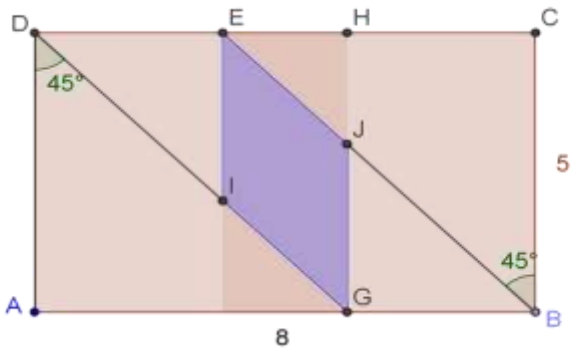
- Costruisci la figura con geogebra
- Esportala in word e aggiungi l'elenco dei comandi utilizzati per costruirla;
  salva nella cartella PROVA 2D presente in *scrittura*, i due file (word e geogebra) con il tuo nome;
- stampa la pagina word e consegnala unitamente al testo della prova completato e al foglio a quadretti dove risolverai il seguente problema:

Problema: Dato un trapezio rettangolo ABCD in cui la diagonale AC è perpendicolare al lato obliquo BC, sapendo che DA, lato perpendicolare alle basi, è il triplo della base minore, calcola la misura della base minore sapendo che la somma delle basi con il lato obliquo risulta 28a; Calcola quindi il valore dell'area del trapezio.

PROVA gennaio febbraio Classi Seconde C e D (stessi tempi della precedente)

Problema 1

Data la seguente figura



a) Ricostruiscila con geogebra, rispettando le misure riportate,
b) esportala su Word
c) scrivi i passaggi essenziali che hai effettuato per costruirla.
d) Stampa il foglio e consegnalo unitamente al foglio quadrettato dove hai risposto alle seguenti domande:

1. Determina il perimetro del parallelogramma IGJE;
2. Determina il perimetro del parallelogramma DGBE;

Problema 2

In un triangolo rettangolo ABC l'altezza relativa all'ipotenusa BC è AH. Sapendo che AH è il doppio di BH e che l'area del triangolo è 45 cm^2, calcola il perimetro del triangolo ABC. (chiama BH….).

Problema 3

Disegna con geogebra un triangolo rettangolo di ipotenusa 10 e altezza relativa ad essa lunga 7.

Suggerimento: un triangolo rettangolo …….

PROVA aprile Classi Seconde C e D
TRASFORMAZIONI

Su un foglio A4 ingrandisci il disegno sotto riportato, rispettando le proporzioni:

Al triangolo rettangolo in figura applica Sr ° SC ° σF,2 ° T*v,* in modo che sia evidente l'applicazione delle varie proprietà e definizioni delle trasformazioni applicate; A questo punto com'è il triangolo finale rispetto a quello iniziale? Elenca tutto ciò che puoi notare.

TEOREMA DI PITAGORA:

Conoscendo il teorema di Euclide, completa la dimostrazione guidata del teorema di Pitagora:

La …….. dei …….. costruiti sui ……

è equivalente al …….. costruito sull' ……

Sia ABC il triangolo rettangolo in figura e Q1, Q2, Q3, quadrati.

Sia CH l'altezza come in figura, prolungata sino ad intersecare il lato del quadrato Q3, formando così due rettangoli R1 ed R2 che……..

……

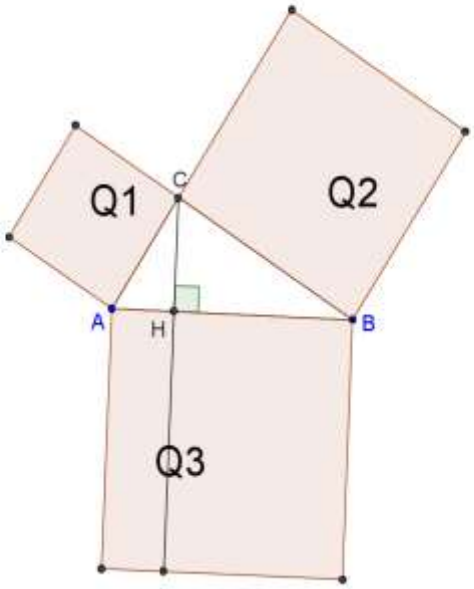
……

……

……

……

……



SEZIONE AUREA

Dato il segmento AB lungo 3 cm, **DEFINISCI** e **CALCOLA ALGEBRICAMENTE**, applicando il procedimento **COMPLETO**, la lunghezza AC della sua sezione aurea.

Disegna quindi AB (con le proporzioni che preferisci) e trova AC per via grafica come fatto in laboratorio, completando con la dimostrazione formale.

Raccolta di problemi

Di seguito si riportano alcuni problemi risolti in laboratorio di informatica durante l'ora di geometria.

La prassi generale seguita è la seguente:

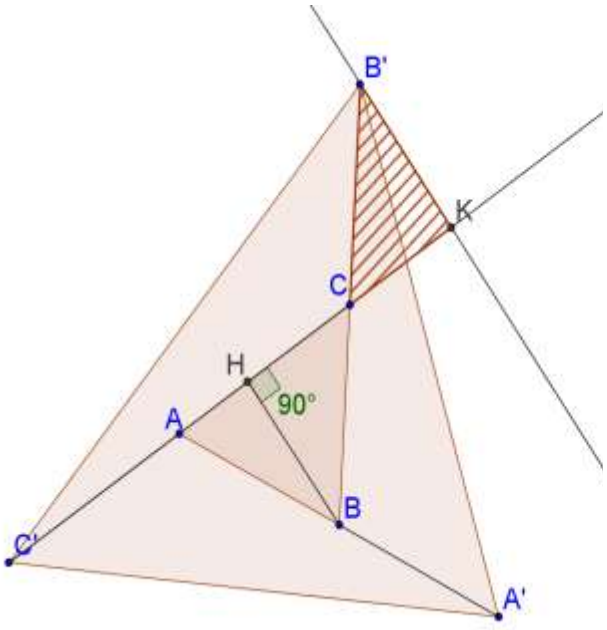
- L'insegnante visualizza una figura particolare sullo schermo della lavagna interattiva,
- L'alunno ha il compito di replicarla con le proporzioni o le misure presenti
- Infine dalla figura l'alunno ricava, attraverso teoremi o calcoli, perimetri, aree o misure richieste.
- Quindi stampa il foglio finale dove sono presenti figura e risoluzione del problema e lo consegna all'insegnante (che lo corregge e lo riconsegna all'alunno che lo conserva nel quaderno)

Problema 1

Dato un triangolo ABC, si prolunghi AB di un segmento congruente ad esso BA', e lo stesso per gli altri lati (come mostrato in figura):

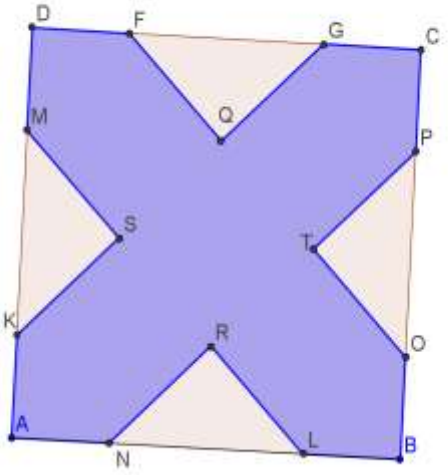
- Come risultano i triangoli CKB' e BHC?
- Come sono le altezze dei triangoli CC'B' e ACB (la prima relativa a CC' e la seconda relativa ad AC)?
- Quindi in che relazione sono le loro aree?

  Conclusione:



L'area del triangolo A'B'C' è il …….. dell'area di ABC.

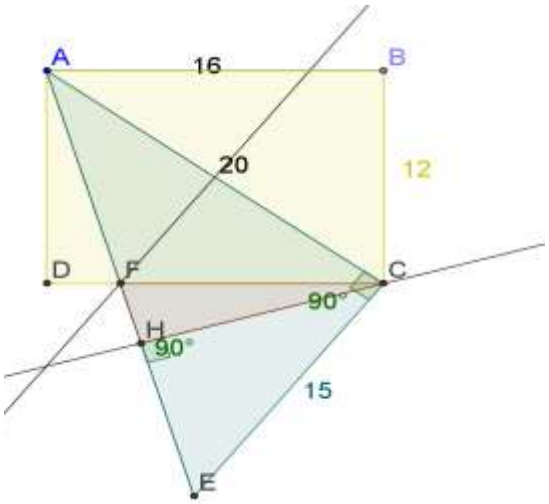
Problema 2



Sapendo che la misura del lato AB è 10 cm,

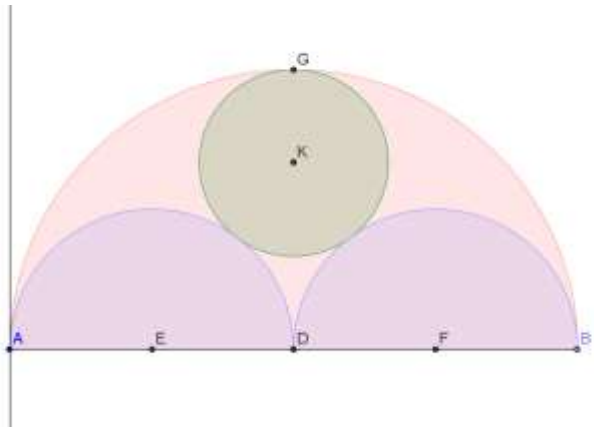
calcola area e perimetro della figura colorata.

Problema 3



Dato il rettangolo ABCD in figura, con le misure ivi riportate, determina l'area del triangolo ACF

Problema 4



Nella figura accanto i due semicerchi sono tangenti fra loro, se il raggio AD misura 6 cm, quanto misura il loro raggio?

Se il cerchio piccolo interno è tangente sia al semicerchio grande che a quelli piccoli, quanto misura il suo raggio? (Suggerimento: unisci i due centri E e K... e concentrati sul triangolo EKD)

Esempio di scheda distribuita in laboratorio di informatica, perché gli alunni svolgessero il compito, stampassero quanto ottenuto e conservassero (nel frattempo l'insegnante, girando per le bancate, prende nota di quanti sono in grado di eseguire quanto descritto…ed in genere....risponde alle domande dicendo **"leggi sulla scheda…c'è scritto!!!!!"**.

La spirale aurea

Creazione della macro *Sezione Aurea*

- Sia AB un segmento qualsiasi, e sia C il suo punto medio;
- Costruisci la circonferenza di centro B e raggio CB e la retta perpendicolare ad AB e passante per B; sia D il loro punto di intersezione.
- Traccia la semiretta uscente da A per D e la circonferenza di centro D e passante per B; sia E il loro punto di intersezione.
- Traccia la circonferenza di centro A e raggio AE e sia S il punto di intersezione con AB:
    - Il segmento AS è la sezione aurea del segmento AB.

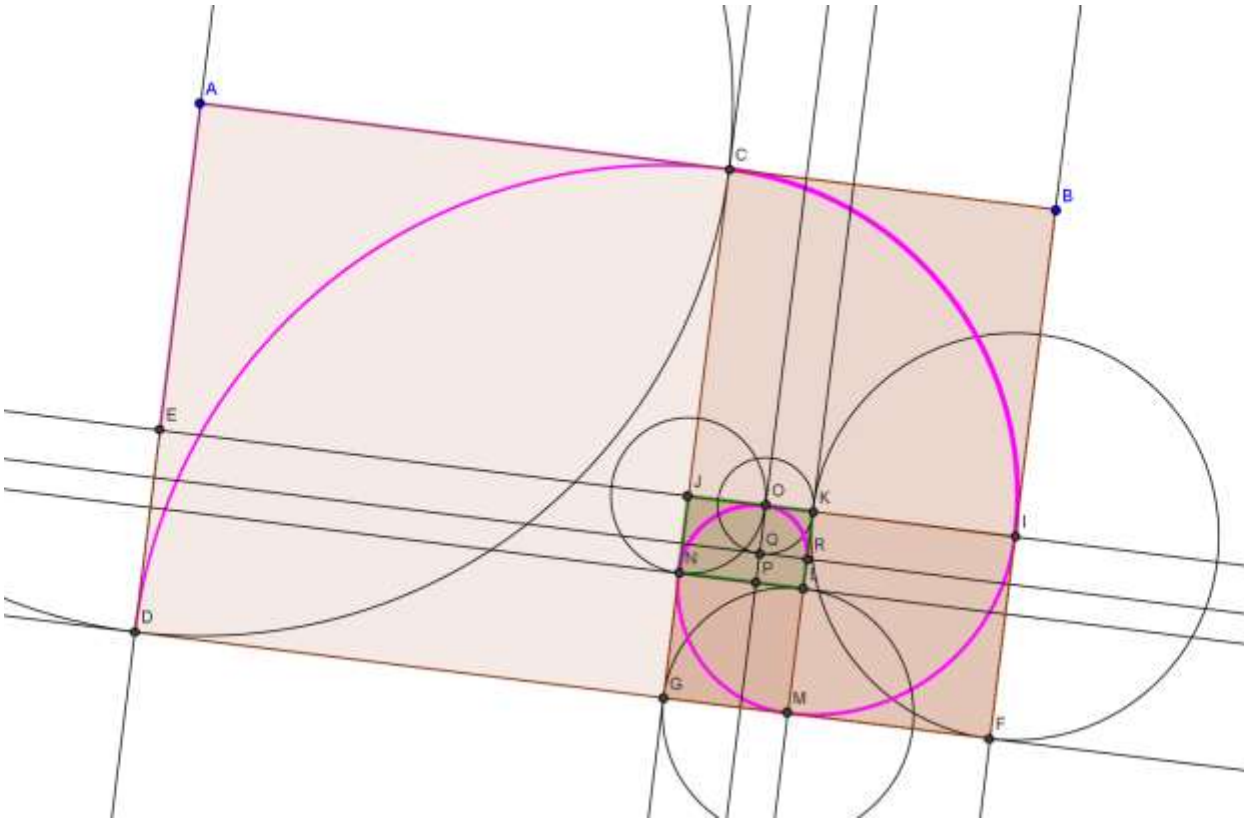
A questo punto apri la tendina degli *Strumenti* e scegli *crea nuovo strumento*, nella finestra che compare devi scegliere:

- gli oggetti iniziali (il segmento AB) e quelli finali (il punto S ed il segmento AS);
- inoltre il nome da assegnare sarà *sezione aurea*, il suggerimento deve spiegare cosa fa il pulsante (quindi scriverai che *selezionando il segmento si crea la sua sezione aurea*)
- l'icona può essere personalizzata con una foto a tua scelta, oppure rimanere generica.

Se volgiamo poter utilizzare questo pulsante in altre occasioni, vai su *organizza strumenti*, all'interno della stessa tendina, e scegli *salva con nome*.

Costruzione della spirale aurea

- Sia AB un segmento qualsiasi: disegna la sua sezione aurea con il pulsante appena creato (AC)
- Traccia la circonferenza di centro A e passante per C, e la perpendicolare per A ad AB: sia D il loro punto di intersezione
- Traccia le rette per D e B perpendicolari ad AD e AB, in modo da formare il rettangolo aureo ABFD

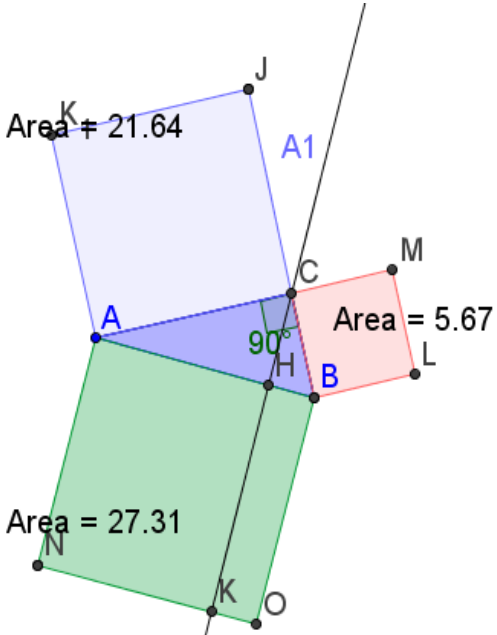


(tale figura non è presente sulla scheda, ma viene visualizzata sullo schermo grande, visibile a tutti)

- Traccia quindi BI la sezione aurea del segmento di BF e così via fino ad avere 5 rettangoli aurei (puoi utilizzare anche un altro strumento…….)
    - Che figure sono ACGD, CBIJ, NLMG …….
    - Perché?
    - Come sono fra loro i rettangoli ABFD e CBFG?
    - E lo stesso vale per i rettangoli più piccoli JKMG e JKLN?

Ora è il momento di tracciare la spirale: con lo strumento *arco di circonferenza dati centro e due punti*, seleziona prima G e poi nell'ordine C e D, quindi ripeti il procedimento all'interno di ogni quadrato …… fino ad ottenere una figura simile a quella data.

Che meraviglia!!!!!!!!



il quadrato azzurro è equivalente al rettangolo NKHA per il primo di euclide
il quadrato rosa è equivalente al rettangolo KOBH
quindi la somma dei due quadrati dei cateti è equivalente alla somma dei due rettangoli
cioè al quadrato dell'ipotenusa

1	21.64	area quadrato 1
2	5.67	area quadrato2
3		
4	27.31	area quadrato 3
5	27.31	somma area1 e 2
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		

(esempio di foglio di stampa che ogni alunno esegue, salva e stampa alla fine dell'attività di laboratorio....e conserva)

Prova finale corso di approfondimento

(Tempo 60', i minuti successivi sono stati impiegati per concludere l'attività sui volumi delle piramidi che si è ritenuta troppo complessa perché i ragazzi la eseguissero autonomamente)

ESERCIZIO 1

- Disegna un triangolo rettangolo ABC con misure a tuo piacere;
- Disegna, al suo esterno, i pentagoni regolari P1, P2 e P3 i cui lati sono AB, AC e BC.
- Calcola le loro misure;
- Calcola l'area dei tre pentagoni e completa la seconda riga della seguente tabella:

	Area P1	Area P2	Area P3
Primo disegno			
Secondo disegno			
Terzo disegno			

- Modifica la posizione di A, osserva cosa si modifica per altre due volte (sempre spostando il punto A) e completa la tabella precedente.
- A parte errori di approssimazione, cosa noti nelle righe della tabella? In che relazione cioè sono le tre aree? Quale teorema ti ricorda?

Tenta una generalizzazione: Dato un triangolo rettangolo ABC la …….. dei …….. costruiti sui cateti è …… al …… costruito su ……..

Salva la figura con il nome ESERCIZIO1

ESERCIZIO 2

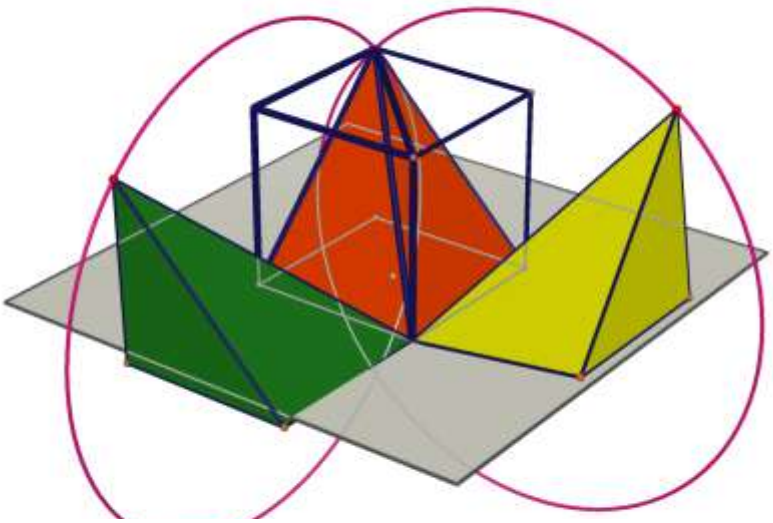
- Costruisci un triangolo rettangolo ABC;
- su ogni lato, esternamente alla figura, costruisci una semicirconferenza che abbia ogni lato come diametro;
- cosa puoi dire delle loro aree? Commenta e spiega la tua ipotesi……
  ……
  ……
  ……
- Salva la figura con il nome ESERCIZIO2

ESERCIZIO 3

- Con Cabri3D costruisci un cubo e ripercorrendo i vertici in modalità punto, nomina i vertici sul piano "grigio" A, B, C, D e quelli "sopra" A', B', C' e D'.
- Scegli per la superficie del cubo lo stile vuoto, poi però disegna la faccia ABCD;
- Costruisci la piramide A'ABCD selezionando prima A' e poi la faccia ABCD;
- Lo stesso esegui per la piramide di vertice A' e di base B'BCC' e poi per quella A'C'CDD'.
- Modificando il punto di vista ed i colori delle varie piramidi (il software li riconosce come poliedri), cosa puoi dire delle varie piramidi? (Per rispondere completa la parte sottostante ed eventualmente integra a lato se devi aggiungere qualcosa)
- Salva la figura come ESERCIZIO3 e rispondi alle seguenti domande:
    - Le loro basi sono dei…….. tra loro …….. perché sono ……
    - Le loro altezze sono …… perché ……
    - Quindi le tre piramidi sono equivalenti perché hanno lo stesso ……
    - Puoi concludere che il cubo è ……..
    - Quindi il volume di ogni piramide può essere calcolato in **due diversi modi**: prova ad eseguire il calcolo algebrico qui sotto chiamando l ("elle") lo spigolo del cubo con entrambe le formule … è ovvio che devono dare lo stesso……..

RISULTATO ATTESO

:



Percorso di geometria solida per il triennio

Cristina Bonmassar, Liceo "Leonardo da Vinci" – Trento

Premessa

Da alcuni anni sentivo l'esigenza di trovare uno spazio all'interno del triennio per proporre ai miei alunni lo studio della geometria solida (che secondo la prassi non viene affrontato, se non per dare qualche facile e veloce "ricettina" di impiego, ma che poi si trova ampiamente applicato negli esercizi soprattutto di quarta e di quinta superiore e nei temi di Esame di Stato) e per proporlo secondo un percorso che permettesse loro di apprendere e interiorizzare nella loro memoria a lungo termine i punti essenziali di quanto affrontato.

La lettura di alcune pagine del libro di Villani "Cominciamo dal punto" mi hanno illuminata su come avrei potuto affrontare l'argomento e la partecipazione al progetto Caritro, che mi ha permesso di confrontarmi con i colleghi e di conoscere il software di geometria solida Cabri 3D, mi hanno fornito lo stimolo per buttarmi a capofitto nella progettazione del percorso.

Attingendo a piene mani dalle parole di Villani, si può dire che la geometria dello spazio gioca un ruolo fondamentale in tutte le discipline scientifiche, nelle arti figurative e , più in generale (anche se in forma meno consapevole), nella vita quotidiana di ciascuno di noi. Certo, la geometria dello spazio è più complessa di quella del piano, ma proprio per questo richiede un maggior attenzione nel suo insegnamento.

La prima cosa da fare era trovarle uno spazio: così come suggerisce Villani, ho deciso di ridurre ulteriormente i tecnicismi della trigonometria e quindi di pensare ad un percorso da proporre nella classe quarta, dopo aver affrontato la trigonometria e lo studio delle funzioni esponenziali e logaritmiche.

Poi, era necessario trovare una linea d'azione: sempre ispirata da Villani e da Raffaella Manara, ho deciso di impostare lo studio della geometria dello spazio collegando in modo naturale le nozioni tridimensionali (in particolare definizioni ed enunciati di teoremi) alle corrispondenti nozioni bidimensionali già studiate in precedenza evidenziandone analogie e diversità. Per contenere poi il tempo necessario a svolgere questa parte di programma, molte dimostrazioni sono state omesse o solo accennate a grandi linee oppure verificate tramite Cabri 3D, secondo quanto mi è stato suggerito dal lavoro del prof. Tomasi. L'uso di questo software mi sembrava che permettesse agli alunni di fare attività di scoperta e congettura (che può risultare molto motivante) e di superare, almeno in parte, le difficoltà che si riscontrano nella realizzazione di disegni "ragionevoli", derivanti dal fatto che le rappresentazioni piane di figure spaziali non possono essere mai fedeli. Sempre in quest'ottica ho deciso di non limitarmi a rappresentazioni grafiche (bidimensionali), ma di ricorrere anche a modelli (tridimensionali), preferibilmente realizzati dagli stessi alunni con vari materiali (cartoncino, bastoncini di legno, polistirolo, Polydron).

Da tutto ciò è scaturito il percorso che ora vado a descrivere.

Scheda riassuntiva

Docente

Bonmassar Cristina

Liceo Scientifico “Leonardo da Vinci” Trento

Classi coinvolte

4sA del Liceo Scientifico “Leonardo da Vinci” Trento (con doppia lingua)

Numero di alunni per classe

20

Periodo dell’anno

27 marzo – 29 maggio

Argomenti trattati

- Rette e piani nello spazio.
- Figure nello spazio: diedri e poliedri.
- Volumi.

Obiettivi di apprendimento

- Estendere allo spazio alcuni temi della geometria piana, anche al fine di sviluppare l’intuizione geometrica (secondo quanto specificato dalle *Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento per la matematica nei Licei scientifici*).
- Conoscere e saper utilizzare le proprietà degli enti geometrici nello spazio.
- Fornire uno strumento concettuale atto a descrivere, comprendere e schematizzare la realtà nella quale viviamo e a formare le procedure che utilizziamo per intervenire su di essa.
- Saper utilizzare le conoscenze sviluppate in ambito linguistico e logico per descrivere il lavoro svolto in laboratorio e sviluppare propri ragionamenti e dimostrazioni in ambito matematico.

Modalità di lavoro

- Lavoro a gruppi di 3 o 4 studenti nelle attività di tipo manipolativo (costruzione di modelli con materiali vari).
- Lavoro individuale al computer nelle attività che prevedevano l’utilizzo del software Cabri 3D.
- Revisione collettiva dell’attività pratica svolta.
- Risoluzione di esercizi alla lavagna.

Modalità di registrazione del lavoro da parte degli studenti

- Schede guida per gli studenti.
- Relazioni svolte a turno da un gruppo di 2 o 3 studenti individuati di volta in volta dall’insegnante.

Numero unità orarie impiegate e loro consistenza

18 unità orarie da 50 minuti + 2 unità orarie di verifica

Tipologia di verifica

Una verifica scritta divisa in due parti:

- Parte 1 proposta sotto forma di test a risposta multipla e quesiti in cui si richiedeva enunciazione e relativa dimostrazione di teoremi studiati in classe;
- Parte 2 proposta sotto forma di esercizi.

Esiti della verifica (somministrata a 19 studenti – 1 studente assente per malattia)

	Parte 1	Parte 2
Ottimo	0 – 0%	5 – 26%
Buono	3 – 16%	2 – 10%
Discreto	4 – 21%	6 – 32%
Sufficiente	2 – 10%	3 – 16%
Insufficiente	10 – 53%	3 – 16%

Valutazione dell'attività

Il percorso è stato ben accettato dagli alunni, i quali hanno apprezzato il ricorso sia al software che alla realizzazione di modelli (che poteva rischiare di risultare banale per ragazzi di quarta superiore), riconoscendolo come valido aiuto a quello sviluppo dell'intuizione geometrica che era uno degli obiettivi di apprendimento.

Quanto poi questo obiettivo sia stato raggiunto è un'altra questione: a giudicare dai risultati della verifica, sembrerebbe di poter affermare che gli alunni hanno appena mosso i primi passi nella direzione di una conoscenza e di un utilizzo consapevole delle proprietà degli enti geometrici nello spazio.

Se qualche concetto è stato interiorizzato dai ragazzi risulterà chiaro nel corso del prossimo anno scolastico, quando la classe si troverà ad utilizzare in svariati contesti la geometria solida come strumento di descrizione, comprensione e schematizzazione della realtà in cui viviamo. Non vorrei essere troppo ottimista, ma credo che aver almeno avvicinato la geometria solida in un percorso seppur sperimentale e ancora molto in divenire, produrrà un qualche frutto.

Difficoltosi rimangono invece l'utilizzo delle conoscenze sviluppate in ambito linguistico e logico per descrivere il lavoro svolto in laboratorio e lo sviluppo di propri ragionamenti e dimostrazioni in ambito matematico. Ciò risulta molto evidente dagli esiti della parte 1 della verifica e dalla lettura delle relazioni prodotte dai ragazzi. In queste ultime, in particolare, si evidenzia una mancanza di lessico scientifico specifico e l'incapacità di rielaborare i risultati di un'attività, riordinandoli in un percorso logico che non sia solo una semplice cronaca di quanto svolto in classe. Su questo obiettivo c'è ancora molto da lavorare ed è un lavoro che interessa non solo la geometria solida, ma tutta la matematica e più in generale tutte le materie scientifiche. Su questo come insegnanti abbiamo molto da riflettere perché forse si tratta di abilità che essendo difficili da far acquisire, tendiamo a mettere da parte! Da parte mia, nel percorso appena concluso, avrei voluto e dovuto dedicare più tempo alla revisione delle relazioni presentate dagli alunni, discutendone in classe con loro e insistendo per ottenere una stesura migliore, magari dopo aver presentato qualche esempio di lavoro ben fatto. Purtroppo la mancanza di tempo (eravamo alla fine dell'anno scolastico) e tutta una serie di coincidenze non favorevoli, mi hanno impedito di agire in questo senso.

Adesso che ho rotto il ghiaccio e la fatica iniziale è stata fatta, la mia intenzione è comunque quella di riproporre il percorso opportunamente modificato.

In primo luogo l'attività potrebbe essere spezzata in due parti: una parte riguardante rette, piani e figure nello spazio, che è proponibile alla classe terza; una parte riguardante invece volumi (ampliata rispetto a quella originaria, in modo da includere anche i solidi di rotazione), che è proponibile in quarta. Il nuovo ordinamento del Liceo Scientifico, con l'aumento di un'ora settimanale di lezione per tutto il triennio, dovrebbe rendere possibile una tale suddivisione.

Mi sembra inoltre opportuno intervallare le varie attività di laboratorio con frequenti lezioni in cui gli alunni possano risolvere test, esercizi e problemi sia alla lavagna che sulla carta e/o utilizzando la dinamicità del software Cabri 3D. La scelta di proporre quasi tutti gli esercizi in blocco in una scheda finale (scelta peraltro dettata dalla ristrettezza dei tempi a disposizione) è risultata infelice, soprattutto perché rischia di aumentare negli alunni la sensazione di incapacità nell'affrontare gli argomenti trattati. In tal senso potrebbe rivelarsi utile la possibilità per gli alunni di utilizzare Cabri 3D anche nei compiti di casa.
Alcune schede proposte ai ragazzi vanno poi riviste in quanto sono risultate di difficile comprensione: infatti spesso la trasposizione delle idee su carta fa perdere loro efficacia e chiarezza. L'aver osservato le reazioni dei ragazzi alle attività proposte mi permette di rimediare ai punti deboli del percorso.
Un'ultima osservazione sulle verifiche: il poco tempo a disposizione mi ha imposto di somministrare un'unica verifica divisa in due parti; sarebbe sicuramente meglio proporre più verifiche all'interno del percorso, in modo da monitorare meglio lo stato di acquisizione dei contenuti da parte degli alunni.
In definitiva, pur consapevole dei molti limiti sopra esposti, mi ritengo abbastanza soddisfatta del lavoro svolto, anche se il verdetto finale sulla sua bontà potrà essere pronunciato solo alla fine della sua riproposizione nel prossimo anno scolastico.

Descrizione dell'Attività

Materiali utilizzati

- Schede studenti
- Testo verifica 29 maggio 2012

Traccia breve dell'attività:

Data	Scheda	Commento
27 marzo	N. 1	Rette e piani nello spazio con polistirolo e bastoncini.
29 marzo	N. 1	Rette e piani nello spazio con Cabri 3D.
21 aprile	N. 1	Retta perpendicolare ad un piano con Cabri 3D.
24 aprile	N. 2	Teorema delle tre perpendicolari con Cabri 3D.
26 aprile	N. 2	Teorema delle tre perpendicolari con Cabri 3D.
27 aprile	N. 2	Dimostrazione del teorema delle tre perpendicolari con lavagna e gesso e sue applicazioni.
3 maggio	N. 3	I diedri e la loro misura con Cabri 3D.
5 maggio	N. 4	Costruzione di poliedri con Polydron.
8 maggio	N. 5	La formula di Eulero verificata con Polydron.
10 maggio	N. 6	Costruzione di poliedri regolari con Polydron.
12 maggio	N. 6	Discussione e correzione degli esercizi assegnati nella scheda.
15 maggio	N. 6	Discussione e correzione degli esercizi assegnati nella scheda.
17 maggio	N. 7	Solidi con lo stesso volume e principio di Cavalieri con Cabri 3D.
19 maggio	N. 8	Il volume della piramide con Cabri 3D.
22 maggio	N. 9	Esercizi di riepilogo su tutto il percorso.
24 maggio	N. 9	Esercizi di riepilogo su tutto il percorso.
26 maggio	N. 9	Esercizi di riepilogo su tutto il percorso.
28 maggio	N. 9	Esercizi di riepilogo su tutto il percorso.
29 maggio		Verifica.

Documenti allegati:

LE SCHEDE DI LABORATORIO

IL TESTO DELLA VERIFICA

ESEMPIO DI RELAZIONE PRODOTTA DAGLI STUDENTI

Laboratorio di geometria solida: scheda 1

RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

Quali sono le reciproche posizioni di due rette nel piano?
Disegnale nella porzione di piano sottostante.

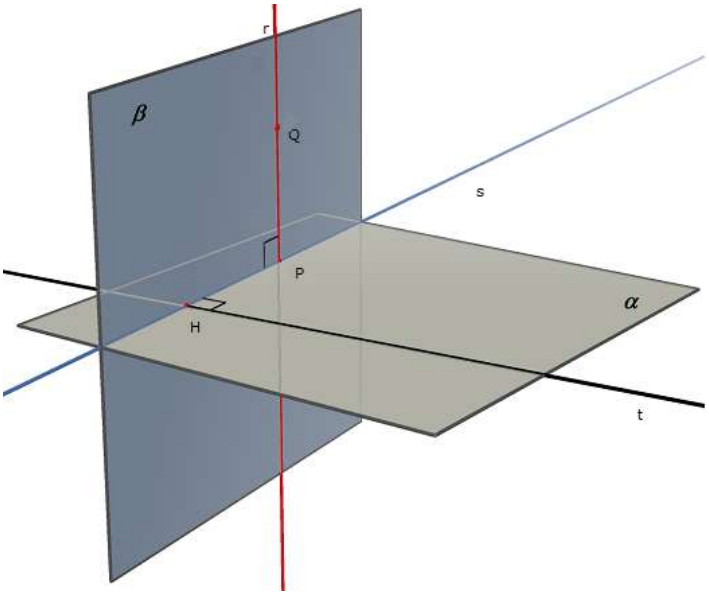
Aiutandoti con i due bastoncini che ti sono stati messi a disposizione, prova a capire quali sono le possibili posizioni di due rette nello spazio.
Scrivi qui sotto le tue ipotesi.

Utilizzando ora anche il pezzo di polistirolo, che simula un piano, prova a capire come può essere posta una retta rispetto ad un piano.
Scrivi qui sotto le tue ipotesi.

In particolare, sotto quali condizioni ti sembra di poter dire che una retta è perpendicolare ad un piano?
Prova a scrivere una definizione di retta perpendicolare ad un piano.

Back

IL TEOREMA DELLE TRE PERPENDICOLARI



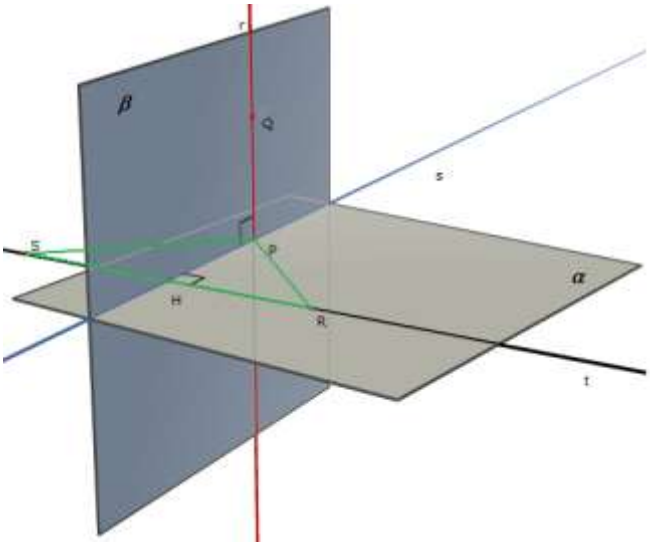
teorema delle tre perpendicolari:

Se una retta r è perpendicolare ad un piano α in un punto P e da questo si conduce una retta s perpendicolare a una retta t di α allora t è perpendicolare al piano β definito dalle rette s e r.

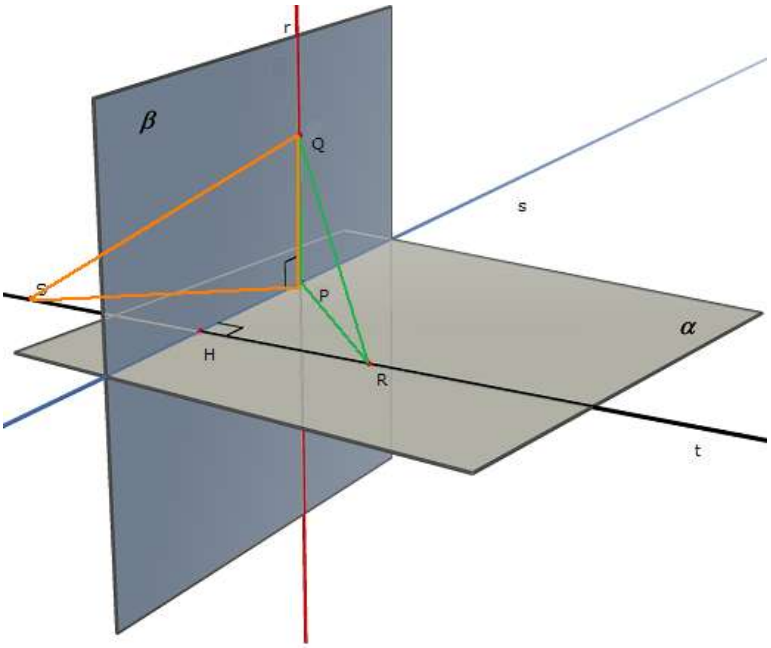
dimostrazione:

per dimostrare che la retta t è perpendicolare al piano β, basta dimostrare che t è perpendicolare a due qualsiasi rette β che passano per α

1. la retta t è perpendicolare alla retta s per costruzione
2. QH è perpendicolare alla retta t ⟶ DIMOSTRAZIONE



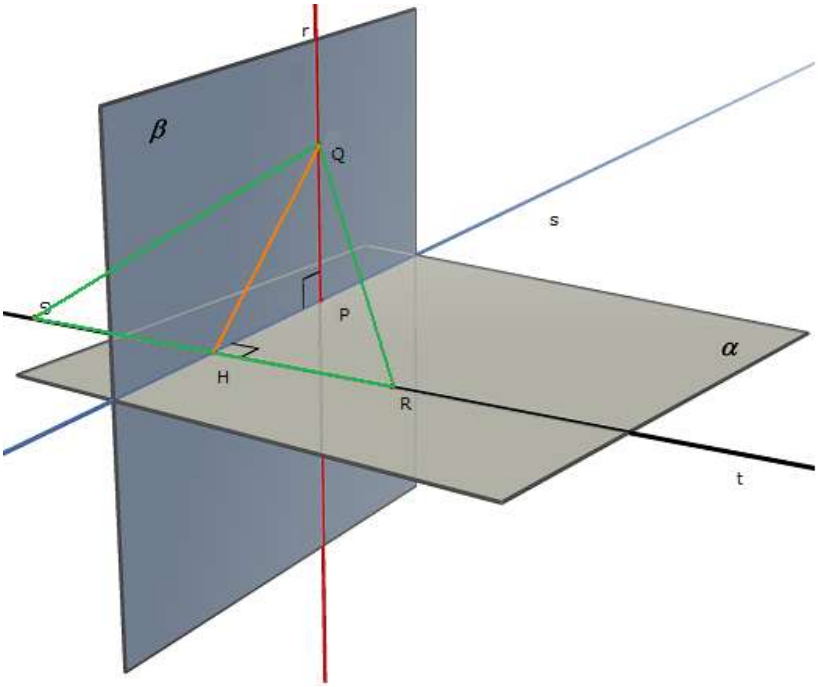
Essendo HR = HS, allora il triangolo PRS è isoscele e quindi SP = PR



QPR e QPS sono triangoli congruenti perché:

1. Hanno il lato QP in comune
2. SP = PR per dimostrazione precedente
3. Gli angoli QPS e QPR sono uguali perché la retta r è perpendicolare rispetto a tutte le rette del piano β e quindi questi due angoli misurano entrambi 90°

Essendo i triangoli QPR e QPS congruenti, allora SQ = QR



Se SQ = QR, allora il triangolo QRS è isoscele e quindi, dato che SH = HR, QH risulta essere la mediana del triangolo SQR. Poiché nei triangoli rettangoli la mediana è anche l'altezza che cade perpendicolare alla base, allora QH è perpendicolare alla base SR e quindi alla retta t.

Back

Laboratorio di geometria solida: scheda 2

IL TEOREMA DELLE TRE PERPENDICOLARI

Costruisci un punto Q fuori dal piano di base.
Costruisci la retta r passante per Q e perpendicolare al piano di base; chiama P il piede della perpendicolare.
Costruisci una retta t contenuta nel piano di base.
Dal punto P traccia, nel piano di base, la retta s perpendicolare alla retta t (strumento *Perpendicolare*, tenendo premuto il tasto *Ctrl*).
Chiama H il punto di intersezione della retta s con la retta t.
Costruisci il piano β definito dalle rette r e s.
Misura l'angolo che il piano β forma con la retta t.
Muovi la retta t agendo sui punti che la definiscono.
Qual è la relazione tra la retta t e il piano β ?

Puoi quindi concludere enunciando il seguente teorema:

TEOREMA DELLE TRE PERPENDICOLARI.
Se una retta r è perpendicolare ad un piano α in un punto P e da questo si conduce una retta s perpendicolare ad una retta t di α , allora.....
……
……

Dimostrazione del teorema delle tre perpendicolari.

Per dimostrare che la retta t è perpendicolare al piano β , basta dimostrare che t è perpendicolare a due qualsiasi rette β che passano per H.
La retta t è perpendicolare alla retta s per costruzione. Consideriamo allora la retta QH e dimostriamo che è perpendicolare alla retta t.
Costruiamo un punto R, diverso da H, sulla retta t.
Nel piano di base traccia la circonferenza di centro H e passante per R. Chiama S l'altro punto di intersezione della circonferenza con la retta t.
Costruisci il triangolo PRS (strumento *Triangolo*).
Di che tipo di triangolo si tratta?

Quindi…….

Cancella il triangolo PRS e disegna i triangoli QPR e QPS.

Di che tipo di triangoli si tratta?

Che relazione esiste tra questi due triangoli?

Quindi……..

Cancella i due triangoli e costruisci il triangolo QRS.
Di che tipo di triangolo si tratta?

Cosa rappresenta per questo triangolo il segmento QH?

Puoi dunque ritenere conclusa la dimostrazione? Motiva la tua risposta.

Compiti per giovedì 26 aprile.

1. Ricostruisci con carta e penna la dimostrazione del teorema delle tre perpendicolari.
2. Risolvi il seguente esercizio:

   Siano ABC un triangolo rettangolo in A, r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B. Si dimostri che i tre triangoli PAB, PBC, PCA sono triangoli rettangoli. (Esame di Stato di Liceo Scientifico, corso di ordinamento, sessione ordinaria 2010, quesito 2)

Back

Laboratorio di geometria solida: scheda 3

I DIEDRI

DEFINIZIONE

Si dice **angolo diedro** o, più brevemente **diedro**, ciascuna delle due parti di spazio limitate da due semipiani che hanno l'origine comune. Ciascun semipiano è detto **faccia** del diedro, mentre la retta, origine dei semipiani, è detta **spigolo**.

Per lavorare con i diedri dobbiamo poterli confrontare e questo è possibile se sappiamo misurare l'apertura di un diedro. Cerchiamo allora un modo per definire e misurare l'apertura del diedro.

Comincerai costruendo un diedro con Cabri 3D.

Traccia una retta sul piano di base e chiamala r.
Costruisci un punto P sopra il piano di base e un punto Q sotto il piano di base.
Costruisci il semipiano definito dalla retta r e dal punto P e il semipiano definito dalla retta r e dal punto Q.
Nascondi il piano di base.
Hai così costruito un diedro di spigolo r.
Muovendo i punti P e Q apri e chiudi il diedro.

Costruisci un punto O sulla retta r e crea il piano passante per O e per due qualsiasi punti A e B presi ciascuno su una faccia diversa del diedro.
Traccia la semiretta passante per O e per A e chiamala a; traccia la semiretta passante per O e per B e chiamala b.
Hai ottenuto un angolo di vertice O e di lati a e b (figura piana), che è l'intersezione del diedro con il piano costruito e che si chiama **sezione del diedro**. Misura tale angolo.
Prova a muovere i punti A e B: cosa osservi?

Costruisci ora un altro punto V sulla retta r e costruisci il piano parallelo al piano passante per O, A e B. Ottieni così un'altra sezione del diedro. Misurala: cosa noti?
Sposta il punto V sulla retta r: che relazione c'è fra le sezioni che si formano?

Hai verificato un importante teorema: sai riconoscerlo ed enunciarlo?

TEOREMA

La misura della sezione di un diedro dipende da come essa è posta rispetto al diedro stesso. Quindi per misurare l'apertura del diedro dobbiamo scegliere non una sezione qualsiasi, ma una che sia definita in modo univoco: è la **sezione normale**, cioè quella ottenuta sezionando un diedro con un piano perpendicolare allo spigolo.

A questo punto non c'è più ambiguità, perché vale il seguente

TEOREMA
Le sezioni normali di uno stesso diedro sono tutte congruenti.

Sapresti dimostrare questo teorema utilizzando i risultati scoperti in precedenza?

Puoi provare a verificare questo teorema con Cabri 3D rifacendo la costruzione precedente nel caso particolare in cui il piano con cui sezioni il diedro non sia uno qualsiasi, ma sia quello perpendicolare allo spigolo: dovrai allora costruire un diedro, un punto O sul suo spigolo, un piano passante per O perpendicolare allo spigolo e poi misurare l'ampiezza della sezione e osservare cosa succede muovendo il punto O sullo spigolo.

Diciamo allora che due diedri sono **congruenti** se e solo se lo sono le loro sezioni normali. La grandezza comune a tutti i diedri congruenti è detta **ampiezza del diedro** e misura con le stesse unità di misura dell'angolo piano.
Si dice che un diedro è acuto, retto o ottuso se lo sono, rispettivamente, le sue sezioni normali.
Questa classificazione dei diedri ci permette di dare la seguente importante

DEFINIZIONE
Si dice che due piani sono tra loro **perpendicolari** se intersecandosi formano quattro diedri retti

Compiti per sabato 5 maggio.

1. Controlla che la scheda sia compilata in ogni sua parte in modo corretto.

2. Risolvi il seguente esercizio:

   Sia ABC un triangolo equilatero di lato l; dal vertice A traccia la perpendicolare al piano del triangolo e su essa fissa il punto D tale che AD=l e congiungi D con B e con C. Quali sono le ampiezze dei diedri di spigoli DA, CA e CB?

   [60°, 90°, 49° 6' 24'']

Back

Laboratorio di geometria solida: scheda 4

I POLIEDRI

DEFINIZIONE

Si dice **poliedro convesso** la figura limitata da poligono situati in piani diversi e disposti in modo tale che ognuno dei lati sia comune a due di essi e il piano di ciascun poligono lasci tutti gli latri dalla stessa parte.
Ogni poligono è detto **faccia** del poliedro.
I vertici delle facce sono detti **vertici** del poliedro.
I lati delle facce sono detti **spigoli** del poliedro.

Ti vengono ora forniti dei poligoni regolari (triangoli equilateri, quadrati e pentagoni) e ti si chiede di costruire poliedri convessi con facce tutte uguali. Per ognuno di essi conta il numero di facce f, il numero di vertici v, il numero di spigoli s e annota se in ogni vertice concorre lo stesso numero di facce, riempiendo la seguente tabella:

Poliedro	*f*	*v*	*s*	Stesso numero di facce in ogni vertice?

Riesci a scoprire una qualche relazione tra f, v e s in questa tabella?

Back

Laboratorio di geometria solida: scheda 5

LA FORMULA DI EULERO

RELAZIONE DI EULERO

Tra il numero *f* delle facce, il numero *s* degli spigoli e il numero *v* dei vertici di un poliedro sussiste la seguente relazione:

$$f + v = s + 2$$

Proverai ora a dimostrare questa formula nel caso particolare del tetraedro, cioè del poliedro avente come facce quattro triangoli equilateri.

Costruisci un tetraedro con i Polydron.

Supponi che il poliedro di partenza abbia $f + v - s = x$: quello che cerchi di dimostrare è che $x = 2$.

Togli una faccia e indica con f_1, v_1 e s_1 rispettivamente il numero di facce, di vertici e di spigoli della figura rimasta: quanto vale $f_1 + v_1 - s_1$ in funzione di *x*?

$$f_1 + v_1 - s_1 = ...$$

Togli ora un'altra faccia e, in modo analogo a prima, calcola $f_2 + v_2 - s_2$ in funzione di *x*:

$$f_2 + v_2 - s_2 = ...$$

Togli ancora un'altra faccia e calcola $f_3 + v_3 - s_3$ in funzione di *x*:

$$f_3 + v_3 - s_3 = ...$$

Ma a questo punto è rimasta una sola faccia e dunque, contando, puoi trovare il valore di $f_3 + v_3 - s_3$ e di conseguenza ricavare *x*.

Le considerazioni fatte valgono più in generale per un qualsiasi poliedro a facce triangolari; bisogna però fare attenzione a togliere di volta in volta solo facce che abbiano almeno uno spigolo libero (cioè non comune ad un'altra faccia che non è ancora stata tolta) e che non spezzino in due parti la superficie poliedrica che rimane.

Se poi le facce del poliedro convesso non sono triangoli, puoi ridurti a quanto appena visto nel modo che segue. Scegli una faccia ed un suo vertice; traccia le diagonali a partire da questo vertice. La faccia viene suddivisa in triangoli, ma non abbiamo aggiunto vertici e per ogni "spigolo" aggiunto si è aggiunta anche una "faccia": quindi il numero $f + v - s$ non cambia.

In questo modo riesci a dimostrare la formula di Eulero.

Back

Laboratorio di geometria solida: scheda 6

I POLIEDRI REGOLARI

DEFINIZIONE

Un poliedro si dice regolare se tutte le facce sono poligoni regolari congruenti e se in ogni vertice concorre lo stesso numero di facce.

Quanti sono i poliedri regolari?
Puoi scoprirlo con il percorso che segue.
Comincia con il completare la seguente tabella:

Poligono regolare	**Misura di ogni angolo interno**
Triangolo equilatero	
Quadrato	
Pentagono regolare	
Esagono regolare	
Poligono regolare con 7 o più lati	

Considera ora un vertice di un poliedro convesso qualsiasi: per ogni faccia che concorre in esso, misura gli angoli che hanno vertice proprio nel vertice del poliedro e somma le loro misure.
Che valore puoi ottenere?

Allora, quanti triangoli equilateri possono concorrere in ogni vertice di un poliedro regolare?
Che tipo di poliedri puoi costruire? Quanti sono i rispettivi vertici, spigoli e facce? Prova con i Polydron.

Quanti quadrati possono concorrere in ogni vertice di un poliedro regolare?
Che tipo di poliedri puoi costruire? Quanti sono i rispettivi vertici, spigoli e facce? Prova con i Polydron.

Quanti pentagoni regolari possono concorrere in ogni vertice di un poliedro regolare?
Che tipo di poliedri puoi costruire? Quanti sono i rispettivi vertici, spigoli e facce? Prova con i Polydron.

Quanti esagoni regolari possono concorrere in ogni vertice di un poliedro regolare?

E quanti poligoni regolari con 7 o più lati?

Riepiloga i dati ottenuti nella seguente tabella:

Poliedro	***f***	***v***	***s***

I cinque poliedri regolari (tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro e icosaedro) sono detti anche solidi platonici, in quanto già classificati da Platone. Platone infatti aveva attribuito alle particelle costituenti i singoli elementi la forma di poliedri regolari; nella sua visione del mondo le particelle del fuoco hanno la forma del tetraedro regolare perché è il più aguzzo, quelle della terra hanno la forma del cubo perché è il più stabile, quelle dell'aria e dell'acqua hanno forme intermedie, l'ottaedro la prima e l'icosaedro la seconda. Infine, secondo il filosofo greco, il dodecaedro è la forma di cui Dio si servì per ornare l'universo.

Compiti per sabato 12 maggio.

1. Dato un tetraedro regolare di spigolo *l*, calcola:
   a) l'altezza $[\frac{\sqrt{6}}{3}l]$
   b) l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive $[70{,}5^\circ]$.

2. Dimostra che congiungendo i centri delle facce di un tetraedro si ottiene ancora un tetraedro di spigolo $\frac{l}{3}$.

3. Determina il lato del cubo avente per vertici i centri delle facce di un ottaedro regolare di spigolo *l* $[\frac{\sqrt{2}}{3}l]$

4. Calcola lo spigolo del tetraedro regolare inscritto in una sfera di raggio r. $[\frac{2}{3}\sqrt{6}r]$

Back

Laboratorio di geometria solida: scheda 7

SOLIDI CON LO STESSO VOLUME

Vogliamo costruire con Cabri 3D due piramidi aventi per base due quadrati equivalenti.
Comincia con il disegnare un quadrato; per disegnare un altro quadrato uguale puoi procedere come segue: a partire da un vertice del quadrato, traccia un vettore a tuo piacimento e poi opera sul quadrato una traslazione usando il vettore scelto.
Costruiamo ora la prima piramide in questo modo:

- traccia la perpendicolare al piano di base passante per un vertice del quadrato, che indichiamo con A
- disegna il piano definito dalla perpendicolare e da uno dei due spigoli che escono da A
- su tale piano traccia la circonferenza di centro A e raggio lo spigolo del cubo
- indica con V l'intersezione della perpendicolare con la circonferenza
- segna il segmento AV
- nascondi la retta perpendicolare, il piano e la circonferenza
- costruisci la piramide che ha per base il quadrato e vertice in V.

Questa è una delle tre piramidi in cui prima abbiamo scomposto il cubo.
Sapresti spiegare il perché?

Traccia ora il piano parallelo al piano di base e passante per V e rappresentane la superficie con righe sottili.
Segna su tale piano un punto P.
Costruisci la piramide che ha per base il secondo quadrato e vertice in P.
Cosa puoi dire dell'altezza delle due piramidi?

Segna ora un punto Q sul segmento AV e traccia il piano passante per Q e parallelo al piano di base; rappresentane la superficie con righe sottili.
Seziona i due poliedri con il piano appena disegnato: ottieni due tronchi di piramide.
Con il comando *Poligono* genera la faccia superiore di ogni tronco di piramide.
Misura l'area delle sezioni ottenute.
Cosa ottieni?

Muovi ora il punto Q sul segmento AV. Cosa noti?

Porta il punto Q a coincidere con V e misura il volume delle due piramidi.
Cosa osservi?

Hai visto una semplice applicazione di un'importante proprietà nota come

PRINCIPIO DI CAVALIERI.

Due solidi sono equivalenti se possono essere collocati rispetto ad un piano in modo tale che ogni altro piano ad esso parallelo stacchi su di essi sezioni equivalenti.

Prova infine a spostare il punto P sul piano; cosa osservi?

Compiti per sabato 19 maggio.

5. Prova a costruire con il cartoncino la scomposizione del cubo in tre piramidi equivalenti

6. Si consideri la seguente proposizione: "Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area". Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta. (*Esame di Stato di Liceo Scientifico, sessione ordinaria 2008, quesito 2*)

Back

Laboratorio di geometria solida: scheda 8

IL VOLUME DI UNA PIRAMIDE

Abbiamo visto che il volume della piramide di base quadrata di spigolo *l* e altezza anch'essa *l* è dato da:

$$V = \frac{1}{3} l^2 \cdot l = \frac{l^3}{3}$$

E se la piramide pur mantenendo base quadrata avesse altezza *h* qualsiasi?
Proviamo a vedere cosa succede al volume di una siffatta piramide costruendo con Cabri 3D piramidi di base quadrata che abbiano altezze rispettivamente doppia e tripla rispetto allo spigolo di base.
Procedi come segue:

- disegna un quadrato nel piano di base
- traccia la perpendicolare al piano di base passante per un vertice del quadrato, che indichiamo con A
- disegna il piano definito dalla perpendicolare e da uno dei due spigoli che escono da A
- su tale piano traccia la circonferenza di centro A e raggio lo spigolo del quadrato
- indica con V l'intersezione della perpendicolare con la circonferenza
- traccia poi la circonferenza di centro V e passante per A
- indica con W l'intersezione della perpendicolare con questa seconda circonferenza
- traccia infine la circonferenza di centro W e passante per V
- indica con Z l'intersezione della perpendicolare con quest'ultima circonferenza. Che relazione esiste tra i segmenti VA, WA e ZA?

- nascondi la retta perpendicolare, il piano e le circonferenza
- costruisci le piramidi che hanno per base il quadrato e vertice rispettivamente in V, W e Z.
- calcola il volume di queste piramidi

Cosa puoi osservare?

Puoi quindi dedurre che per una piramide a base quadrata di spigolo *l* e di altezza *h* il volume è dato da:

V=……..

Vogliamo ora considerare una piramide con base un poligono qualsiasi e calcolarne il volume.
Nel piano disegna con Cabri 3D un quadrato e poligono convesso e misurane l'area. Muovi con il puntatore uno dei vertici delle due figure piane in modo da renderle equivalenti. Costruisci sulle due basi due piramidi di uguale altezza e misurane il volume. Cosa osservi?

Puoi dunque dire che il volume di una piramide è dato da:

V=……..

Compiti per martedì 22 maggio.

Con Cabri 3D hai verificato il seguente

TEOREMA

Piramidi che hanno uguale altezza e basi equivalenti sono equivalenti.

Prova a farne la dimostrazione; per farlo avrai bisogno di utilizzare il principio di Cavalieri e questo altro

TEOREMA

In una piramide le sezioni parallele alla base sono poligoni simili, i cui perimetri sono proporzionali alla distanza delle sezioni dal vertice della piramide e le cui aree sono proporzionali al quadrato della distanza delle sezioni dal vertice della piramide.

Prova a farne la dimostrazione.

Back

Laboratorio di geometria solida: scheda 9

ESERCIZI

1. In un piano α è dato un triangolo acutangolo ABC e H è la proiezione di A sul lato BC. Indicato con P un generico punto sulla retta perpendicolare in A al piano α, dimostrare che i triangoli PAH, PBH e PCH sono rettangoli.

2. In un piano α sono assegnati un segmento AB di misura 4*a* e un punto O sull'asse di AB distante 4*a* dal segmento stesso. Tracciata la retta *r* perpendicolare al piano α in O, indicare con C il punto di *r* in corrispondenza del quale OC=4*a*. Calcolare la distanza di C dagli estremi del segmento AB.
   [6*a*]

3. Un triangolo equilatero, il cui lato misura *a*, ha uno dei suoi lati giacente su un piano α e il vertice opposto a distanza $\frac{2}{3}a$ dal piano. Determinare l'ampiezza β del diedro formato dal piano α e dal piano del triangolo. $[sen\beta = \frac{4\sqrt{3}}{9}]$

4. Data una piramide VABCD a base quadrata di lato *a*, avente le quattro facce triangolari che sono triangoli equilateri, calcolare:
   a) l'altezza VH della piramide $[\frac{a}{\sqrt{2}}]$
   b) l'ampiezza β dei diedri che le facce laterali formano con la base $[sen\beta = \frac{2}{\sqrt{6}}]$
   c) l'ampiezza α dei diedri che concorrono nel vertice V $[sen\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}]$

5. Una piramide ha per base un triangolo isoscele ABC di lati AB=AC=2*a* e angolo al vertice $\alpha = ar\cos\left(-\frac{3}{5}\right)$. Sapendo che l'altezza AV misura 3*a*, calcolare la superficie della piramide e l'angolo β che la faccia VBC forma con il piano di base. $[S = \frac{66}{5}a^2, \beta = ar\cos\frac{2}{7}]$

6. È dato un tetraedro regolare di base ABC e vertice D e spigolo *l*. Sia M il punto medio di AB e N il punto medio di CD. Dimostrare che MN è perpendicolare sia ad AB che a CD e calcolarne la lunghezza.
   $[\frac{\sqrt{2}}{2}l]$

7. È dato un tetraedro regolare di base ABC e vertice V, il cui spigolo misura *l*. Determinare l'area del triangolo che si ottiene come sezione del tetraedro con un piano passante per uno spigolo laterale del tetraedro e perpendicolare al piano della base ABC. $[\frac{\sqrt{2}}{4}l^2]$

8. Una piramide di vertice V ha per base un quadrilatero ABCD che ha area $20a^2$ ed ha altezza 6*a*. Calcolare a quale distanza dal vertice è stato tracciato il piano parallelo al piano di base che stacca sulla piramide un poligono che ha area $15a^2$. $[3\sqrt{3}a]$

9. Una piramide retta a base quadrata ha altezza 4*a* e le facce laterali formano un angolo $\alpha = arctg\,2$ con il piano di base.
   a) Calcolare la superficie della piramide. $[16\left(1+\sqrt{5}\right)a^2]$
   b) Determinare a quale distanza dal vertice della piramide si deve tracciare un piano parallelo al piano di base per ottenere una piramide che ha superficie laterale pari al 90% della superficie laterale della piramide assegnata. $[6a\sqrt{\frac{2}{5}}]$

10. È assegnata una piramide che ha per base un rettangolo ABCD di lati AB=CD= 6*a* e BC=AD=4*a*. Il vertice V è posto sulla perpendicolare in A al piano di base e ha distanza 5*a* da tale piano. Calcolare le dimensioni del parallelepipedo che è inscritto nella piramide (cioè una base del parallelepipedo è parallela al piano di base della piramide ed ha i vertici sui suoi spigoli laterali, mentre l'altra base giace sulla faccia di base della piramide) ed ha superficie laterale pari a $16a^2$.
    [*due parallelepipedi di altezza rispettivamente 4a e a*]

11. È assegnata una piramide retta a base quadrata che ha spigolo di base 4*a* e altezza 2*a*. Calcolare la superficie totale del cubo inscritto nella piramide. $[\frac{32}{3}a^2]$

12. Dato un tetraedro regolare che ha spigolo *s*, proiettare i centri H, K, L di tre facce sulla quarta faccia nei punti H', K', L'.
    a) Dimostrare che le basi del prisma che ha vertici nei punti HKLH'K'L' sono triangoli equilateri di lato $\frac{1}{3}s$.
    b) Calcolare la superficie totale del prisma. $[\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{18}s^2]$
    c) Calcolare il volume del prisma. $[\frac{\sqrt{2}}{108}s^3]$

13. È assegnata una piramide retta che ha base quadrata di lato 2che è la metà dello spigolo di base. Sezionata la piramide con un piano che è parallelo la piano di base e ha distanza *x* dal vertice, costruire il prisma retto che una base coincidente con la sezione ottenuta e l'altra sulla base della piramide. Calcolare per quale valore di x il volume del prisma vale $\frac{1}{2}a^3$. $[\frac{a}{2}]$

14. Una piramide ha per base un rettangolo ABCD di lati AB=4*a* , AD=3*a* e ha altezza AV=AB. Condotto, a distanza *a* dal piano di base, un piano ad esso parallelo, indicare con *S* la sezione staccata sulla piramide. Calcolare il rapporto tra il volume della piramide e il volume del parallelepipedo che inscritto nella piramide ed ha una base coincidente con *S*. $[\frac{64}{27}]$

15. Calcolare il volume di un tronco di piramide in funzione delle basi e dell'altezza. $[\frac{1}{3}h\left(B+B'+\sqrt{BB'}\right)]$

16. Una piramide ha la base quadrata e l'altezza di 8 cm. Quanti piani paralleli alla base dividono la piramide in due parti i cui volumi sono nel rapporto 7:1? Quali sono le distanze di tali piani dal vertice della piramide? (*Esame di Stato europeo 2005*)

    [*due piani a distanza dal vertice rispettivamente di 4cm e* $4\sqrt{3}$ *cm*]

17. Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali A e A', e volumi V e V'. Si sa che $\frac{A}{A'} = 2$. Calcolare il valore del rapporto $\frac{V}{V'}$. (*Esame di Stato 2002*) [$2\sqrt{2}$]

18. Una piramide quadrangolare regolare è tale che la sua altezza è il doppio dello spigolo di base. Calcolare il rapporto tra il volume del cubo inscritto nella piramide e il volume della piramide stessa. (*Esame di Stato, sessione straordinaria 2006*) [$\frac{4}{9}$]

19. Un tetraedro regolare e un cubo hanno superfici equivalenti. Si determini il rapporto dei rispettivi spigoli. (*Esame di Stato europeo 2009*) [$\frac{\sqrt{2}}{12}$]

20. Si domanda quale rapporto bisogna stabilire tra lo spigolo dell'ottaedro regolare e lo spigolo del cubo affinchè i due solidi abbiano volumi uguali. (*Esame di Stato, sessione suppletiva 2011*)

    [$\frac{\sqrt{2}}{3}$]

Back

Verifica

NOME_____

CLASSE 4sA 2° QUADRIMESTRE - 29 maggio 2012

4° PROVA DI MATEMATICA

Parte 1

1) Enuncia e dimostra il teorema delle tre perpendicolari. *(2 punti)*

2) I poliedri regolari sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Perché? *(1 punto)*

3) Nello spazio, due rette che non hanno punti in comune

	V	F
a. Sono parallele.	☐	☐
b. Possono essere parallele.	☐	☐
c. Sono sghembe.	☐	☐
d. Possono essere sghembe.	☐	☐
e. Non possono giacere su uno stesso piano.	☐	☐

(1 punto)

4) Vero o falso?

	V	F
a. Due rette nello spazio si dicono sghembe quando non hanno alcun punto in comune	☐	☐
b. Se due rette AB e CD sono sghembe tra loro, lo sono anche le rette AC e BD.	☐	☐
c. Se due rette nello spazio sono complanari, ogni retta complanare all'una lo è anche all'altra.	☐	☐
d. Per due rette distinte nello spazio passa sempre uno ed un solo piano.	☐	☐
e. Tre rette nello spazio a due a due incidenti o sono complanari o passano per uno stesso punto.	☐	☐

(1 punto)

5) Vero o falso?

	V	F
a. Se due diedri sono congruenti, tutte le loro sezioni sono congruenti.	□	□
b. Due diedri sono congruenti se e solo se sono congruenti le loro sezioni normali.	□	□
c. Un piano perpendicolare alla faccia di un diedro individua una sezione normale del diedro stesso.	□	□

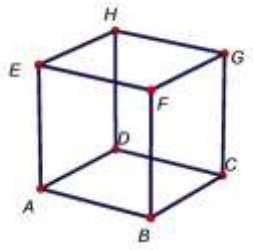
(1 punto)

6) Dati un piano α, una retta $r \subset \alpha$ e un punto $P \notin \alpha$:

	V	F
a. per *P* passano infinite rette parallele ad *r*.	□	□
b. per *P* passano infiniti piani paralleli ad *r*.	□	□
c. per *P* passa uno ed un solo piano perpendicolare ad *r*.	□	□
d. per P passano infinite rette perpendicolari ad r.	□	□

(1 punto)

7) Fai riferimento al cubo rappresentato sotto.



	V	F
a. Il quadrilatero DBFH è un quadrato.	□	□
b. Il triangolo AHB è isoscele.	□	□
c. Il triangolo AHF è equilatero.	□	□
d. Le rette DG e CF sono secanti.	□	□
e. Le rette BC ed EH sono parallele	□	□
f. I piani EHB e BCH coincidono	□	□

(1 punto)

8) Vero o falso?

	V	F
a. Se due prismi retti hanno la stessa altezza e lo stesso perimetro di base, allora l'area della superficie laterale dei due prismi è la stessa.	☐	☐
b. Se due prismi retti hanno la stessa altezza e lo stesso perimetro di base, allora l'area della superficie totale dei due prismi è la stessa.	☐	☐
c. Se due prismi hanno la stessa altezza aree di base equivalenti, allora hanno lo stesso volume	☐	☐
d. Raddoppiando lo spigolo di un cubo, raddoppia anche la sua diagonale.	☐	☐
e. Raddoppiando lo spigolo di un cubo, raddoppia anche la sua superficie totale.	☐	☐
f. Raddoppiando lo spigolo di un cubo, raddoppia anche il suo volume.	☐	☐

(1 punto)

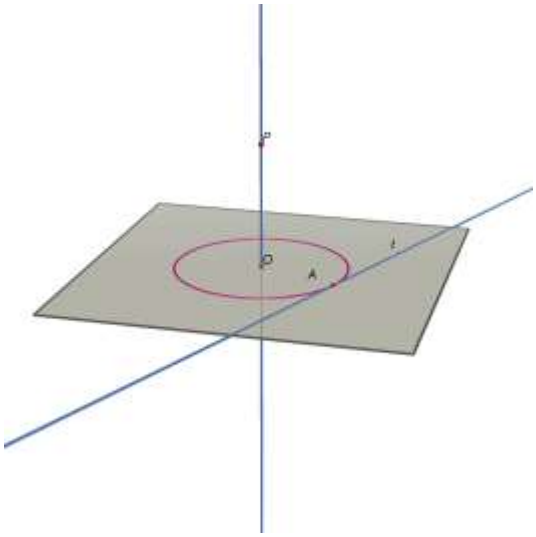
9) Un cubo ha spigolo di misura *a*. Considera il cubo avente diagonale tripla del cubo precedente. Il volume di quest'ultimo rispetto al volume del cubo originario è:

a. Il doppio.
b. Il triplo.
c. Il quadruplo.
d. Nessuna delle precedenti risposte è esatta.

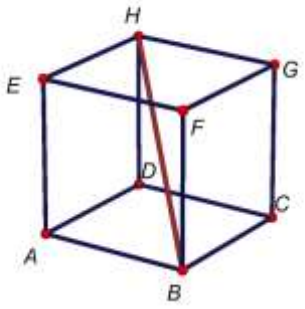
(1 punto)

Parte 2

1) In un piano α è data una circonferenza di centro O. Traccia nel piano α la retta *t*angente alla circonferenza in un generico punto A. Indicato con P un generico punto sulla perpendicolare in O al piano α , dimostra che AP e *t* sono tra loro perpendicolari. *(2 punti)*



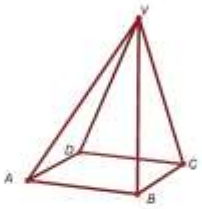
2) Riferendoti alla figura, calcola l'angolo che la diagonale BH del cubo di lato l forma con il piano della faccia ABCD. *(1 punto)*



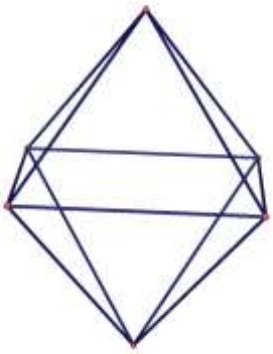
3) Un rettangolo ABCD ha i lati AB=8*a* e BC=6*a*; indica con V il punto sulla retta perpendicolare in B al piano del rettangolo tale che VB=10*a*.

a) Calcola gli angoli che gli spigoli VA, VC, VD formano con il piano di base della piramide VABCD.

b) Tracciato il piano α parallelo al piano di base e distante $5\sqrt{2}a$ dal vertice della piramide, calcola l'area della sezione staccata sulla piramide. *(2 punti)*



4) Un tetraedro e un ottaedro regolari hanno gli spigoli della stessa lunghezza *l*. Dimostra che il volume dell'ottaedro è quadruplo di quello del tetraedro. *(2 punti)*



Back

Esempio di relazioni prodotte dagli studenti

RETTE E PIANI NELLO SPAZIO

Eleonora
Jessica

Abbiamo iniziato un progetto nel laboratorio di geometria solida.
Nella prima lezione abbiamo cercato di capire come si comportano le rette su un piano, nello spazio e rispetto ad un piano. Ci siamo divisi in gruppi eterogenei ed abbiamo iniziato il lavoro seguendo le tracce di una scheda data dalla professoressa.

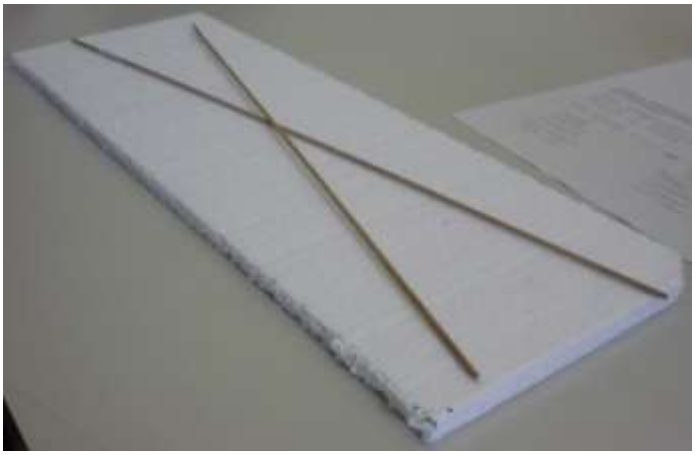
Ci è stato fornito il seguente materiale:

- Due lunghi bastoncini in legno, i quali simulavano due rette
- Un pezzo di polistirolo, il quale simulava un piano

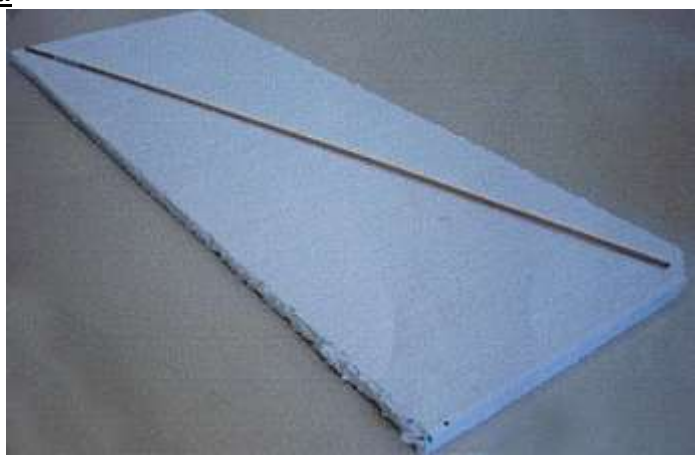
Il ***primo punto*** della scheda, aiutandosi con i bastoncini e il pezzo di polistirolo, chiedeva di trovare quali fossero le reciproche posizioni di due rette su un piano.
Ognuno ha provato a sistemarle nei modi più svariati, ma siamo arrivati tutti alla conclusione che le possibilità erano solamente tre:

- **Rette parallele**

- **Rette incidenti**

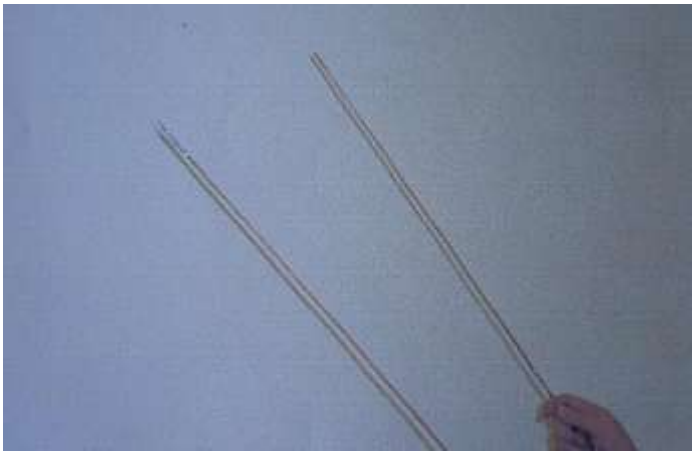


- **Rette coincidenti**

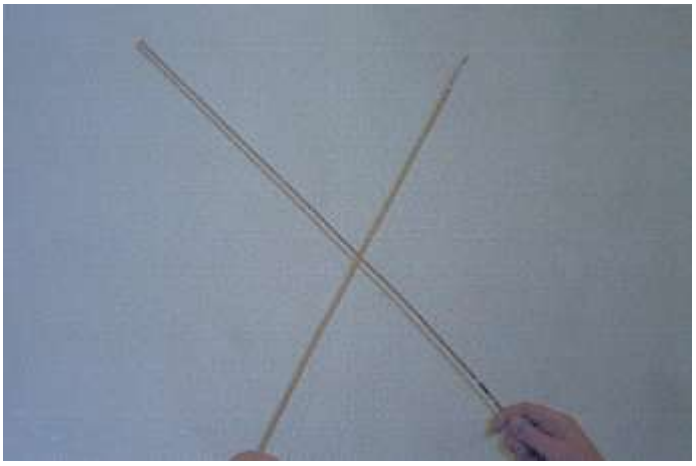


Tutte queste rette abbiamo osservato essere complanari, cioè appartenenti ad uno stesso piano. Ciò non è invece possibile per le rette sghembe, le quali appartengono a piani differenti. Infatti, si chiamano sghembe due rette che, anche se non sono parallele, non si incontrano mai.
Il secondo punto della scheda chiedeva, aiutandosi con i due bastoncini a disposizione, di trovare te possibili posizioni di due rette nello spazio. Questa volta tutti hanno potuto facilmente osservare che le possibilità erano quattro:

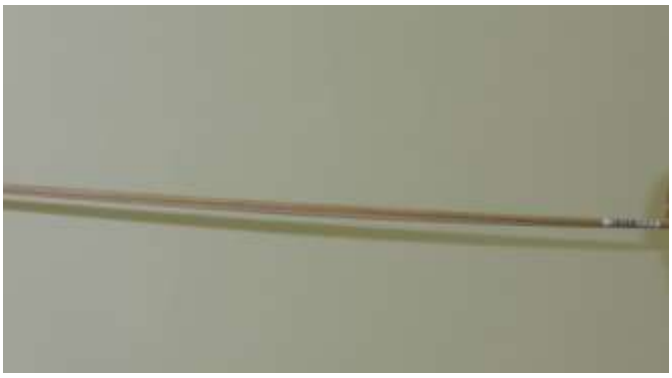
- **Rette parallele**



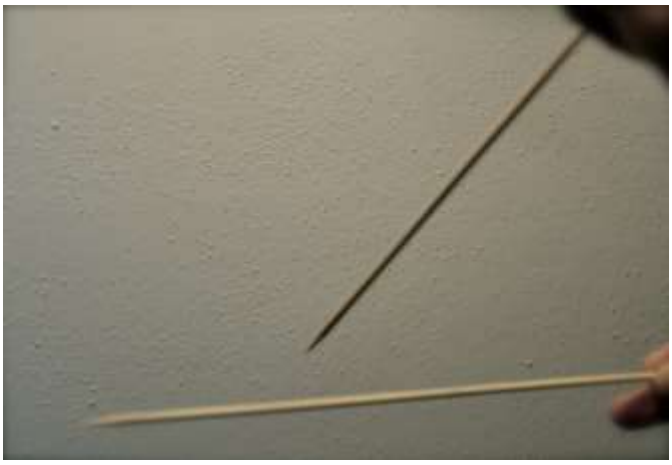
- **Rette incidenti**



- **Rette coincidenti**



- **Rette sghembe**

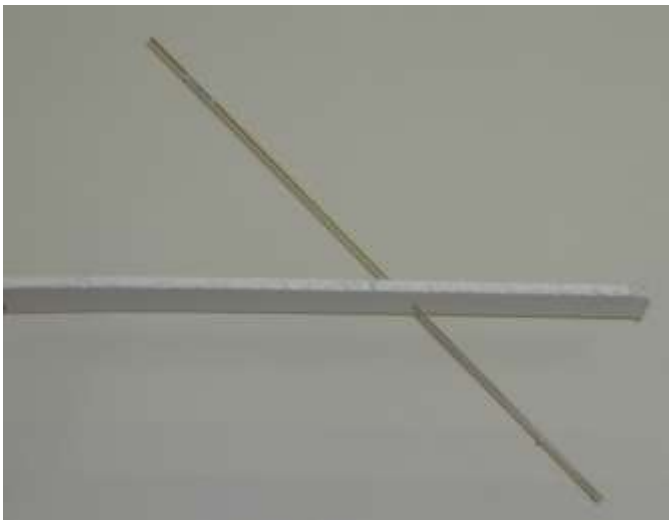


In questo caso le rette, non essendoci un piano che le limita, possono posizionarsi molto più liberamente. Infatti, a differenza del primo esercizio, le rette possono anche essere sghembe.

La ***terza parte*** richiedeva, disponendo ancora una volta del materiale fornito, di trovare tutte le posizioni che una retta può assumere rispetto ad un piano. Ogni gruppo è arrivato alla conclusione che ci può essere:

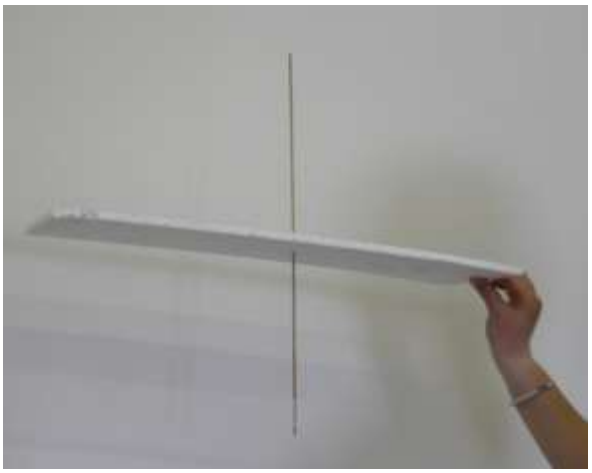
- **Retta parallela al piano**

- **Retta incidente al piano**



Dunque rispetto ad un piano una retta non può essere mai sghemba e nemmeno coincidente. Non è possibile sia sghemba perché, essendo il piano un insieme infinito di punti, la retta, a meno che non sia parallela ad esso, prima o poi lo incontrerebbe. Non può neanche essere coincidente perché apparterrebbe al piano stesso e quindi è come se non esistesse alcuna retta.

La ***quarta parte***, nonché ultima, chiedeva quali fossero le condizioni affinché una retta risulti perpendicolare ad un piano. Anche in questo caso tutti si sono aiutati con uno dei due bastoncini e il piano di polistirolo.

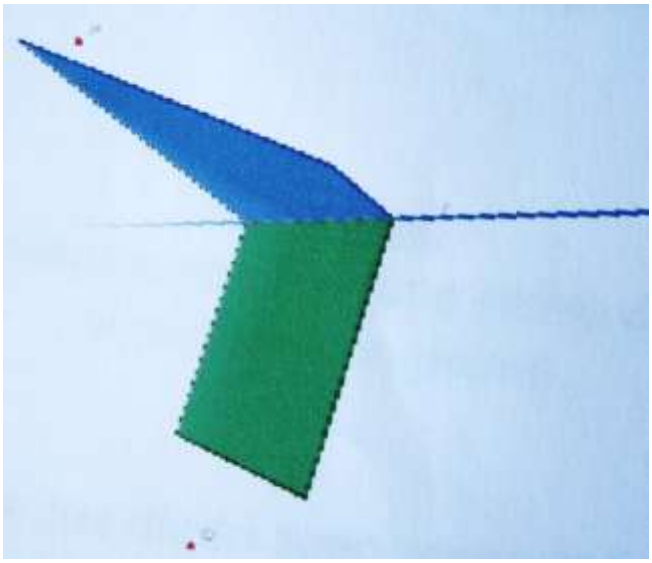


Si è arrivati alla conclusione che una retta per essere perpendicolare ad un piano deve essere perpendicolare ad ognuna delle rette del piano. Questo si può provare dimostrando che la retta è perpendicolare almeno a due delle rette che compongono un piano, infatti due rette sono sufficienti per delineare un piano.

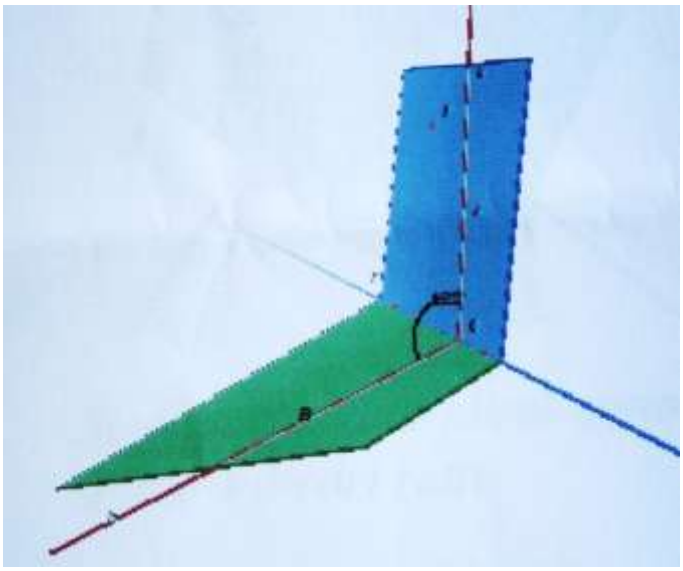
Torna all'indice

I DIEDRI

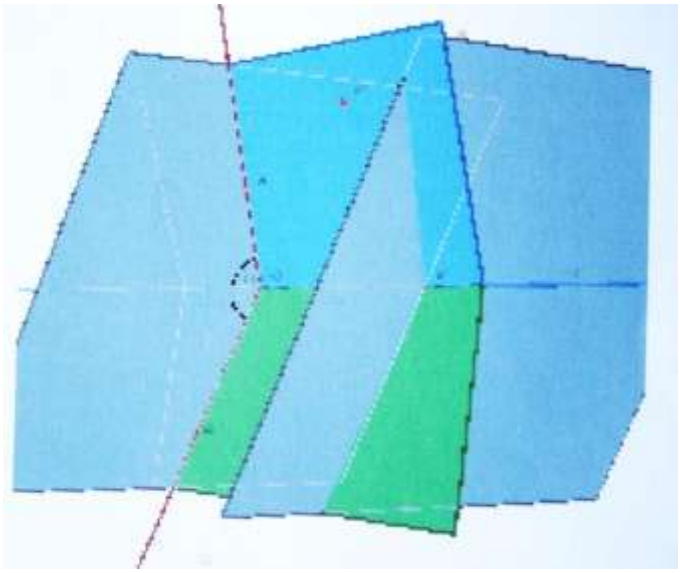
Monica
Claudia



Si dice **angolo diedro** o **diedro** ciascuna delle due parti di spazio limitate da due semipiani che hanno l'origine in comune. Ciascun semipiano è detto **faccia** del diedro, mentre la retta *r*, origine dei semipiani, è detta **spigolo**.



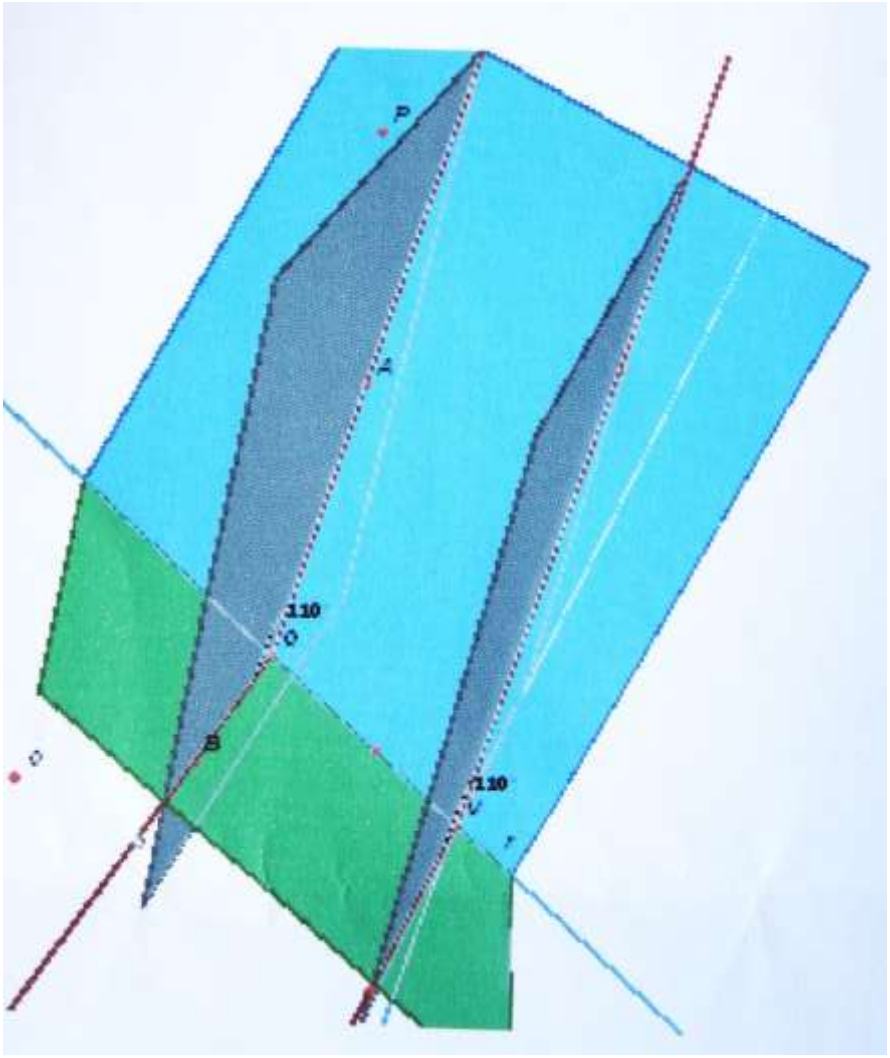
Costruito un punto O sulla retta r e dei punti A e B ciascuno su una faccia diversa del diedro, tracciamo la semiretta per OA e quella per OB.
L'angolo ottenuto si chiama **sezione del diedro**.
Se muoviamo i punti A e B, l'ampiezza del diedro varia.



Costruiamo il piano passante per O, A e B e quello parallelo ad esso passante per V, un nuovo punto sulla retta *r*.
Misurando la nuova sezione del diedro notiamo che ha la stessa ampiezza della precedente.

Possiamo dunque affermare che tutte le sezioni parallele di un diedro sono congruenti.

Per misurare l'apertura del diedro dobbiamo scegliere la **sezione normale**, in altre parole quella ottenuta sezionando un diedro con un piano perpendicolare allo spigolo.



Teorema:
le sezioni normali di uno stesso diedro sono tutte congruenti.

Allora due diedri sono congruenti se e solo se lo sono le loro sezioni normali.

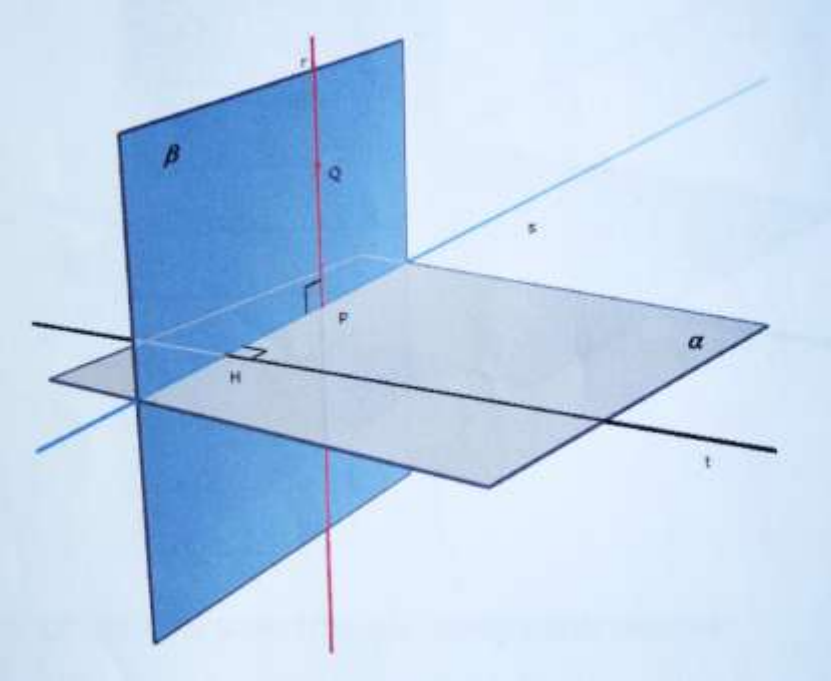
Si dice che un diedro è acuto, retto o ottuso se lo sono le sue sezioni normali.

Si dice che due piani sono tra loro perpendicolari se intersecandosi formano quattro diedri retti.

Torna all'indice

TEOREMA DELLE TRE PERPENDICOLARI

Federico Francesco



$Q \in r$
$r \perp \alpha$
$t \in \alpha$
$s \perp t$
r e $s \in \beta$
$t \perp \beta$

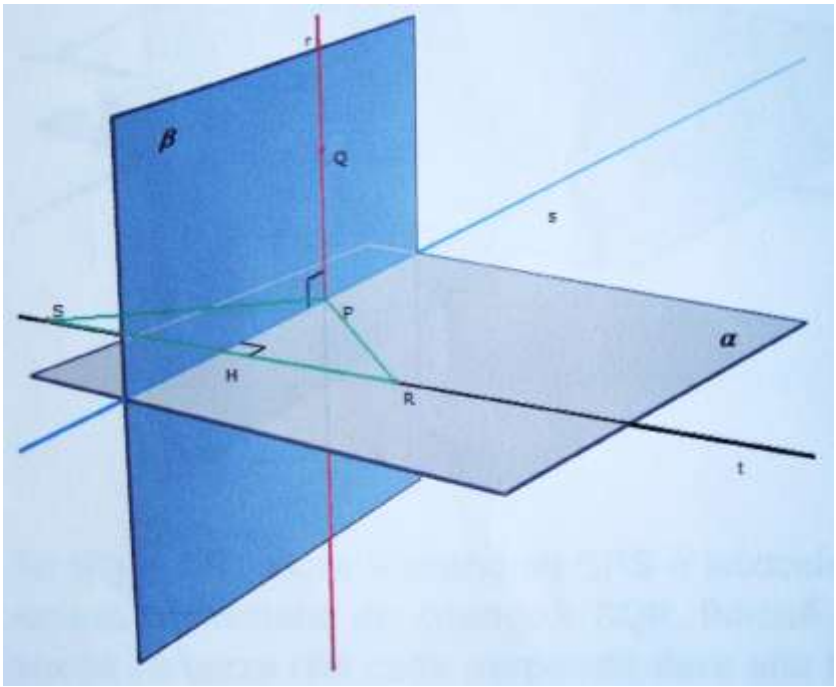
teorema delle tre perpendicolari

Se una retta *r* è perpendicolare ad un piano α in un punto P e da questo si conduce una retta *s* perpendicolare a una retta *t* di α, allora *t* è perpendicolare al piano β definito dalle rette *s* e *r*.

dimostrazione

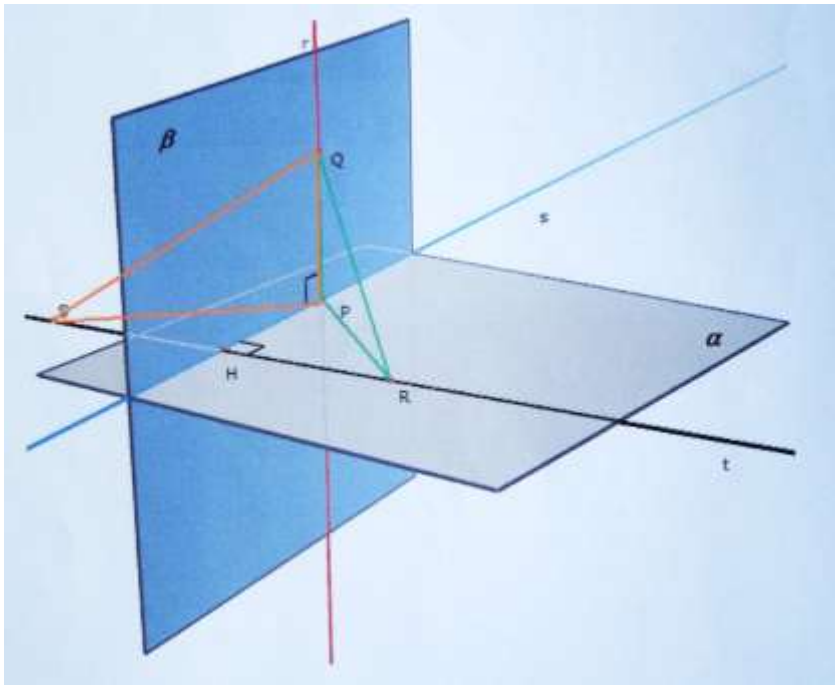
Per dimostrare che la retta *t* è perpendicolare al piano β, basta dimostrare che *t* è perpendicolare a due qualsiasi rette β che passano per α.

1. la retta *t* è perpendicolare alla retta *s* per costruzione
2. QH è perpendicolare alla retta *t* → DIMOSTRAZIONE



$R \in t$
$HR = HS$

Essendo HR = HS, allora il triangolo PRS è isoscele e quindi SP = PR

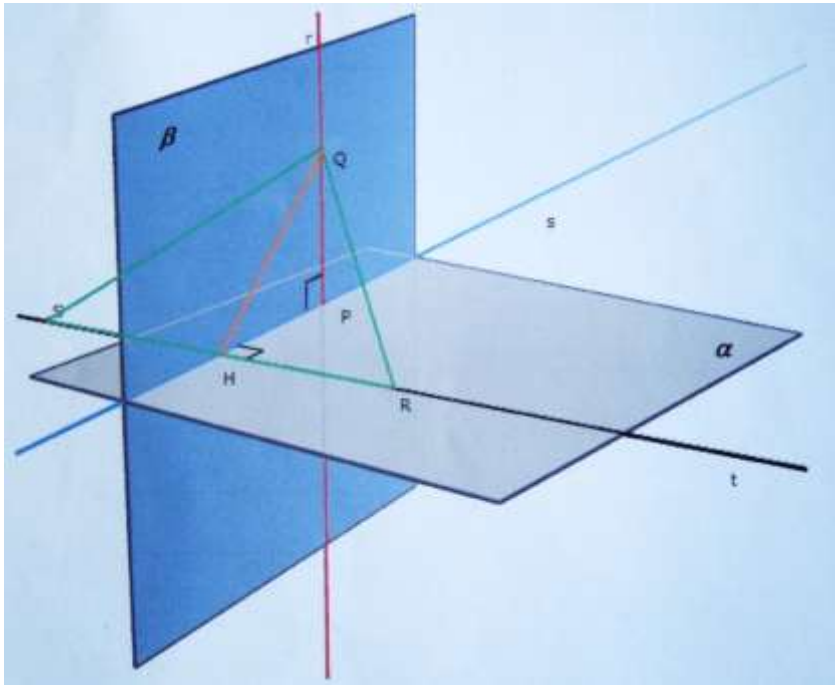


QPR e QPS sono triangoli congruenti perché:

1. Hanno il lato QP in comune
2. SP = PR per dimostrazione precedente

3. Gli angoli QPS e QPR sono uguali perché la retta r è perpendicolare rispetto a tutte le rette del piano β e quindi questi due angoli misurano entrambi 90°

Essendo i triangoli QPR e QPS congruenti, allora SQ = QR



Se SQ = QR, allora il triangolo QRS è isoscele e quindi, dato che SH = HR, QH risulta essere la mediana del triangolo SQR. Poiché nei triangoli rettangoli la mediana è anche l'altezza che cade perpendicolare alla base, allora QH è perpendicolare alla base SR e quindi alla retta t.

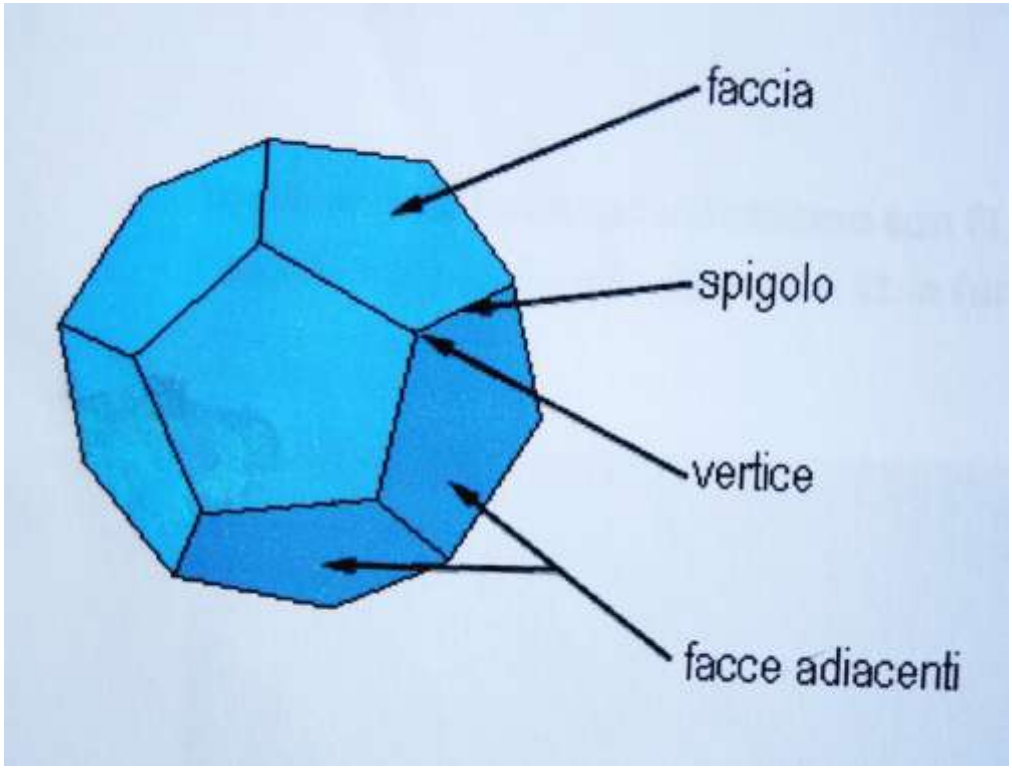
Torna all'indice

I POLIEDRI

Nora
Giuditta

Si dice **poliedro convesso** la figura limitata da poligoni situati in piani diversi e disposti in modo tale che ognuno dei lati sia comune a due di essi e il piano di ciascun poligono lasci tutti gli altri dalla stessa parte.

Ogni poligono è detto **faccia del poliedro**.
I vertici delle facce sono detti **vertici del poliedro**.
I lati delle facce sono detti **spigoli del poliedro**.



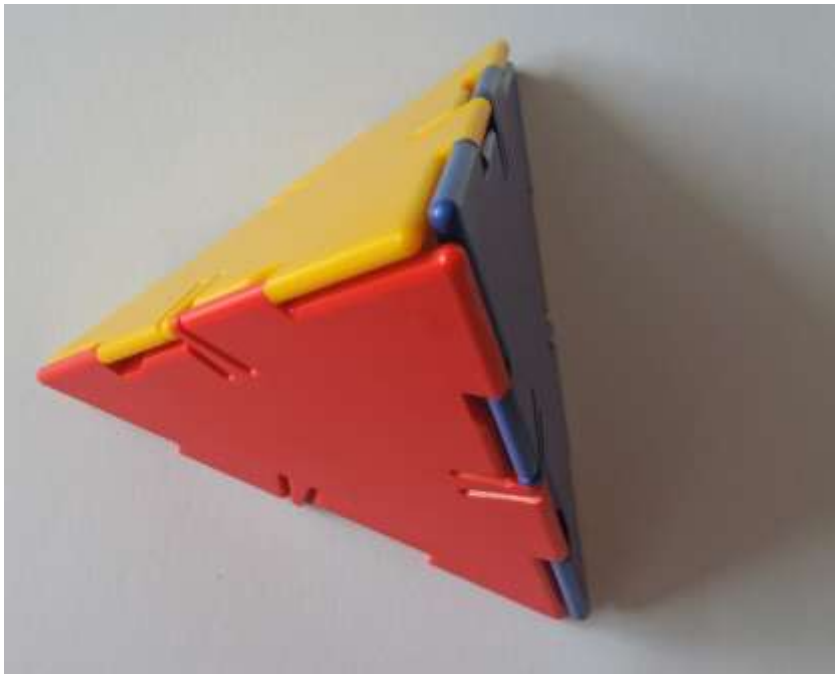
LA FORMULA DI EULERO

La formula di Eulero mette in relazione il numero di facce, spigoli e vertici di un poliedro semplice.

$$\mathbf{f + v = s + 2}$$

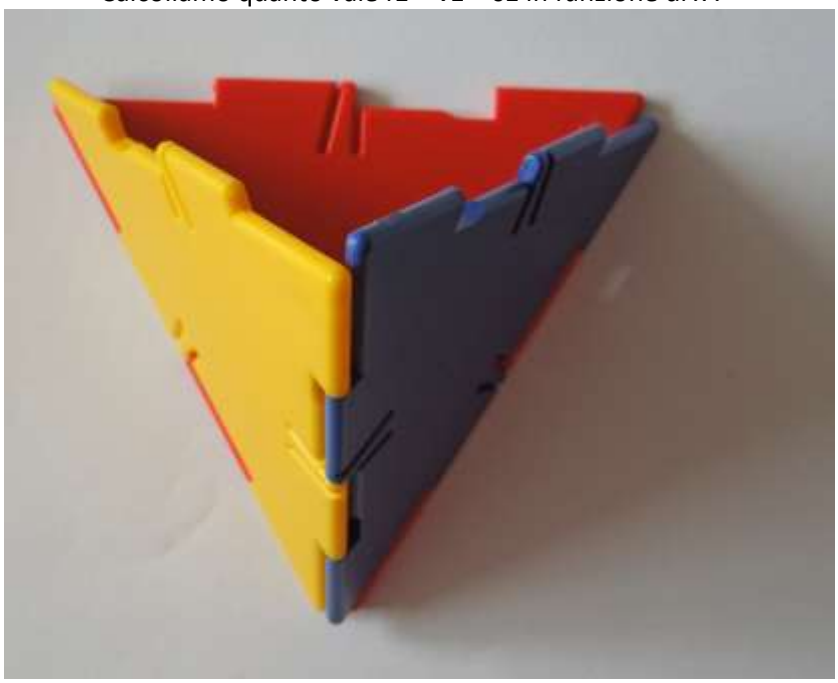
DIMOSTRAZIONE DELLA FORMULA DI EULERO NEL CASO PARTICOLARE DEL TETRAEDRO

1. Supponiamo che il poliedro di partenza abbia f + v - s = x, quello che cerchiamo di dimostrare è che x = 2.



$$f + v - s = x$$

2. Togliamo una faccia ed indichiamo con f1, v1 e s1 il numero di facce, vertici e spigoli rimasti. Calcoliamo quanto vale f1 + v1 – s1 in funzione di x :



f1 = f - l v1 = v s1 = s

f1 + v1 –s1 = f - l + v – s → f1 + v1 – s1 = x – 1

3. Togliamo un'altra faccia al tetraedro e in modo analogo a prima calcoliamo f2 + v2 - s2 in funzione di x:

f2 = f - 2 v2 = v s2 = s - 1

4. Togliamo poi ancora un'altra faccia al tetraedro e calcoliamo f3 + v3 - s3 in funzione di x

f3 = f – 3 v3 = v – 1 s3 = s – 3
f3 + v3 – s3 = f – 3 + v – 1 – s + 3 → f3 + v3 – s3 = x – 1

A questo punto è rimasta una sola faccia e quindi contando possiamo trovare il valore di f3 + v3 + s3, e di conseguenza ricavare x.
n° f (f3) =1
n° v (v3) = 3
n° s (s3) = 3
1 + 3 - 3 = x - 1 → x = 1 + 1 → **x = 2**

I POLIEDRI REGOLARI

Un poliedro si dice regolare se tutte le facce sono poligoni regolari congruenti e se in ogni vertice concorre lo stesso numero di facce.

LA SOMMA DELLE MISURE DEGLI ANGOLI DELLE FACCE DEL POLIEDRO

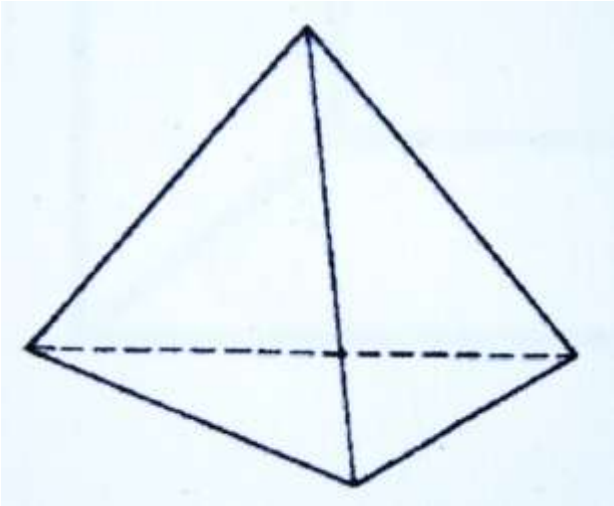
La somma delle misure degli angoli delle facce del poliedro che hanno vertice proprio nel vertice del poliedro stesso, è sempre minore di 360° (Se la somma fosse uguale o maggiore di 360° non sarebbe possibile creare un poliedro convesso poiché la facce non si congiungerebbero).

Grazie a questo principio si riesce a verificare quanti triangoli equilateri, quadrati, pentagoni, esagoni o poligoni con più di 7 lati regolari possono concorrere in ogni vertice di un poliedro regolare.

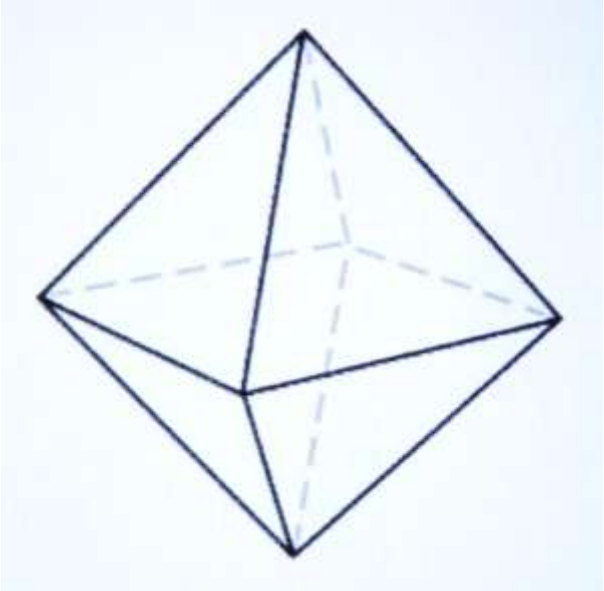
Il numero di triangoli equilateri che possono concorrere in ogni vertice di un poliedro regolare sono 3,4, 5.

(5 x 60 = 300)

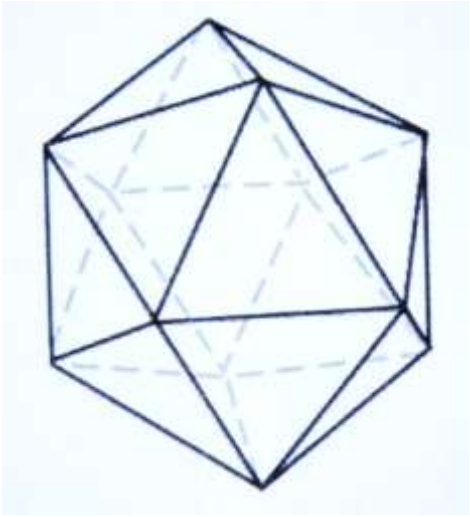
TETRAEDRO (3 triangoli equilateri) : presenta 4 facce, 4 vertici e 6 spigoli.



OTTAEDRO (quattro triangoli equilateri) : presenta 8 facce, 6 vertici e 12 spigoli.

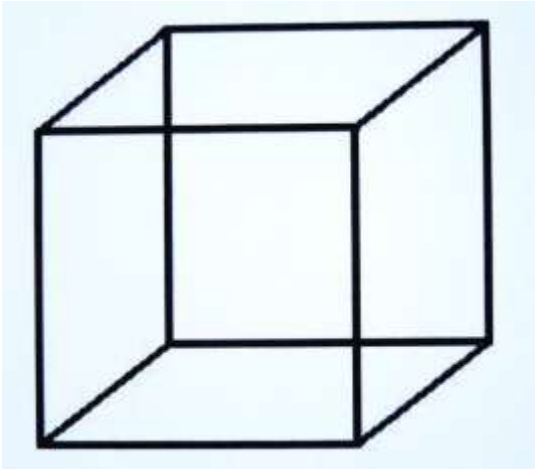


ICOSAEDRO (5 triangoli equilateri) : presenta 20 facce, 12 vertici e 30 spigoli.



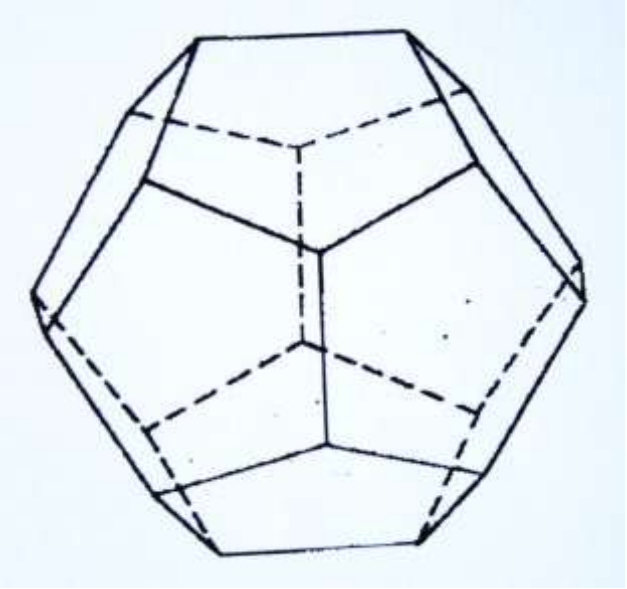
Il numero di quadrati che possono concorrere in ogni vertice di un poliedro regolare sono 3.
(3 x 90 = 270)

CUBO (3 quadrati) : presenta 6 facce, 8 vertici e 12 spigoli.



Il numero di pentagoni regolari che possono concorrere in ogni vertice di un poliedro regolare sono 3. (3 x 108 = 324)

DODECAEDRO (3 pentagoni) : presenta 12 facce, 20 vertici e 30 spigoli.



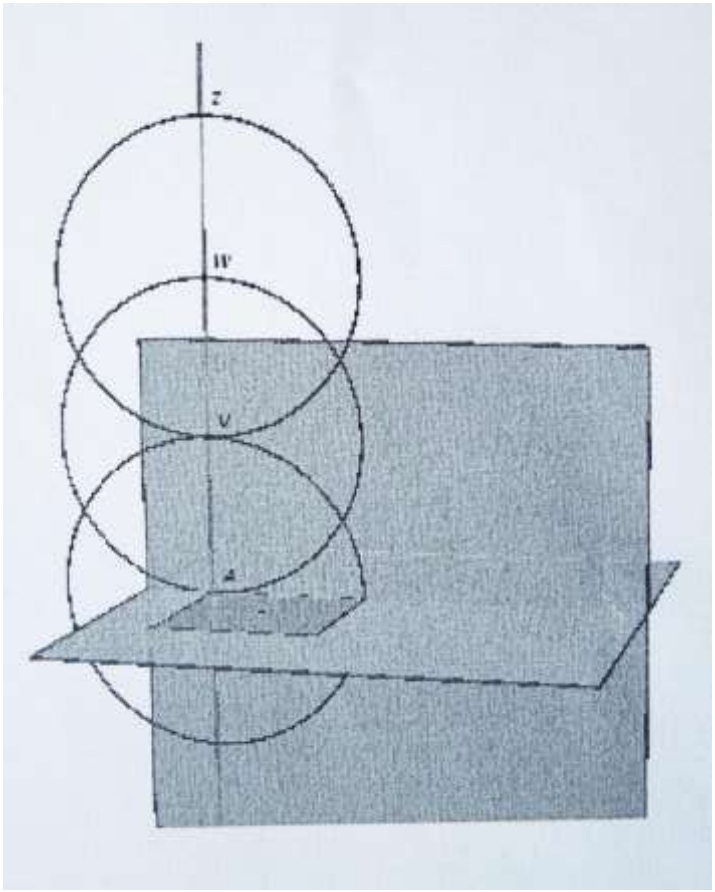
Torna all'indice

IL VOLUME DI UNA PIRAMIDE

Elisa
Tullio
Federica

Partendo dal volume di una piramide a base quadrata di spigolo *l* e altezza *l* (iscritta in un cubo di spigolo *l*)

$$V = \frac{1}{3} l^3$$

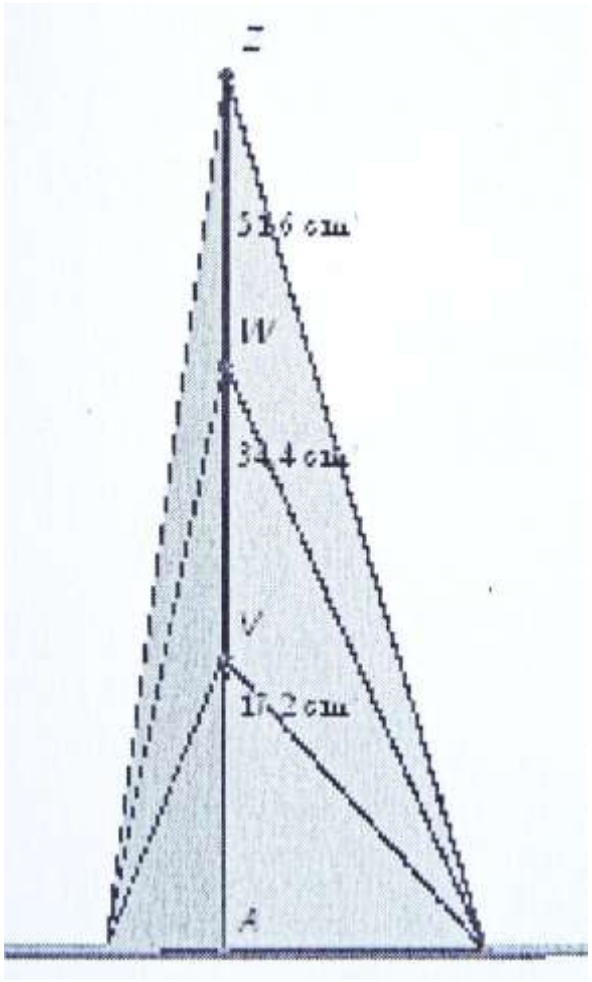


Vogliamo ricavare la formula di una piramide a base quadrata ma di altezza qualsiasi.

Costruzione

posso notare che esiste una proporzionalità diretta tra i segmenti VA, WA, ZA:

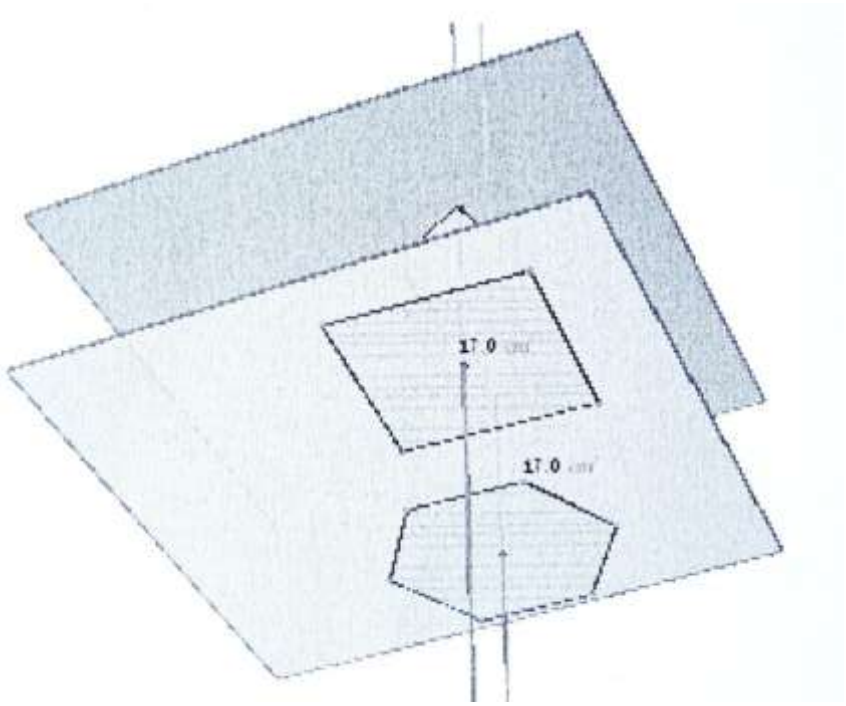
WA=2VA ZA=3VA



Dato che tra il volume e l'altezza c'è proporzionalità possiamo dedurre che il suo volume è:

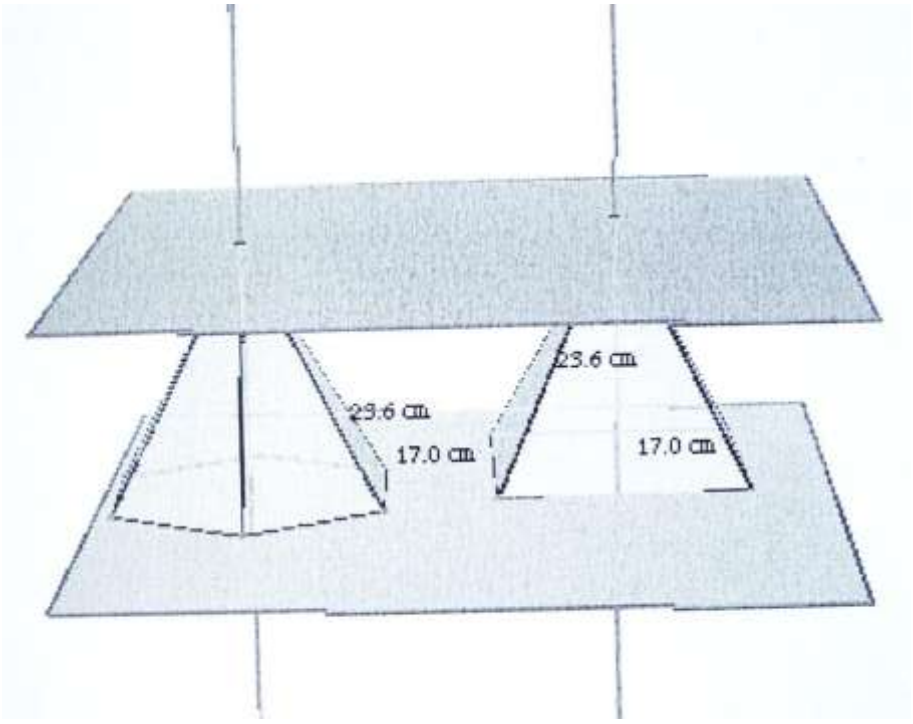
$$V = \frac{1}{3} l^2 h$$

Disegniamo due piramidi di altezza uguale e basi diverse con area uguale, notiamo che hanno lo stesso volume.



Di conseguenza possiamo constatare che il volume di una piramide qualsiasi è:

V = 1/3 * area di base * altezza



Possiamo quindi ricavare due teoremi:

1 TEOREMA
Piramidi che hanno uguale altezza e basi equivalenti, sono equivalenti.

2 TEOREMA
In una piramide le sezioni parallele alla base sono poligoni simili, le cui aree sono proporzionali al quadrato della distanza delle sezioni dal vertice della piramide.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA 2

th:
S simile a S'
$S:h^2= S':x^2$

II teorema di Talete ci dice che VAB è simile a VA'B' quindi anche gli angoli alla base sono simili, di conseguenza anche i poligoni compresi.

$S:S'=AB^2: (A'B')^2$

VH' : VH =V A' : VA (perché i triangoli sono simili)

$VH:VH' = AB:A'B' \rightarrow (VH')^2 :VH2 = (A'B')^2 : AB^2$

DIMOSTRAZIONE TEOREMA 1

ip: Ab=Ab' h=h'
th: V=V

$Ab:Ab_x = h^2:x^2$ $Ab':Ab'_x= h^2: x^2$

→

$Ab_x= Ab'_x$ allora per il principio di Cavalieri V=V'

Torna all'indice

Funzioni quadratiche

Francesca Arrigoni, Istituto di Istruzione "M. Curie" – Pergine

Scheda riassuntiva

Classi coinvolte
2 ASA (Scientifico opzione scienze applicate)

Numero di alunni per classe
14

Periodo dell'anno
14 gennaio 2012 – 18 febbraio 2012 e il 28 aprile 2012

Argomenti trattati
Funzioni quadratiche che nascono da problemi di geometria dinamica

Obiettivi di apprendimento
- Utilizzare software di Geometria dinamica;
- Studiare l'andamento di funzioni quadratiche (massimi e minimi su intervalli chiusi e limitati)
- Attuare strategie di problem solving, confrontando due diversi approcci (con il computer, con la modellizzazione analitica)
- Saper descrivere le procedure applicate

Modalità di lavoro
- Lavoro a gruppi di 3 o 2 studenti, con possibilità di utilizzo di una postazione al computer individuale (una unità oraria al sabato);
- Discussione sull'attività pratica svolta in classe (una unità oraria al mercoledì successivo)

Modalità di registrazione del lavoro da parte degli studenti
- Schede guida per gli studenti
- File da salvare
- Relazioni svolte a turno da un componente del gruppo

Numero unità orarie impiegate e loro consistenza
Circa 10 unità orarie da 50 min. + 1 unità oraria di verifica + 1 unità oraria a distanza di 40 giorni

Tipologia di verifica
Verifica in parte scritta e in parte su file

Esiti della verifica (valori assoluti su 14 studenti)

	Verifica in laboratorio	Riepilogo lavoro
Buono	4	4
Discreto	1	1
Sufficiente	2	3
Insufficiente	7	6

Valutazione dell'attività

Premessa

Lo spunto per l'attività mi è stato fornito dalla lettura del documento di accompagnamento ai nuovi programmi per la classe Seconde (luglio 2009) in Francia, che si può trovare in rete http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/lycee2010/mathsettice/seconde/fonctions/fonc2index.htm.

La notion de fonction est, pour beaucoup d'élèves de seconde, une notion difficile à appréhender. Pour autant sa maîtrise est nécessaire à toutes les poursuites d'études.
Le travail sur les fonctions est amorcé au collège. Un objectif essentiel de ce travail consiste à faire émerger progressivement, et sur des exemples concrets, « un processus faisant correspondre à un nombre un autre nombre ». Les fonctions linéaires et affines sont vues à présent comme des exemples particuliers de tels processus, ce qui ouvre davantage la possibilité de soulever quelques questions de fond au sujet de la représentation graphique. Par exemple si l'objectif est de représenter graphiquement la fonction qui à tout nombre associe le carré de ce nombre une question importante et porteuse de sens est « peut-on ou non relier deux points consécutifs d'un nuage par un segment? ».
La notion de fonction linéaire est présentée comme offrant un modèle pour toutes les situations qui relèvent de la proportionnalité. Pour beaucoup d'élèves, la notion de fonction ne fait pas encore sens en début de seconde. Il importe donc qu'avant toute formalisation nouvelle, les élèves soient dès le début de l'année et le plus souvent possible confrontés à des situations dans lesquelles il y ait besoin, pour répondre à une question posée au départ, _ d'identifier deux quantités qui varient tout en étant liées, _ d'expliciter le lien entre ces deux quantités de diverses manières: _ tableau de valeurs obtenu grâce à des mesures ou à l'utilisation d'un logiciel (logiciel de géométrie ou tableur), _ nuage de points dessiné ou obtenu expérimentalement, _ courbe liée à la situation posée, _ formule exprimant l'une des quantités en fonction de l'autre, _ d'identifier les avantages et les inconvénients de tel ou tel aspect d'une fonction – tableau de valeurs, nuage de points, courbe, formule – selon la question initialement posée. (…)
En effet, outre le fait de faire acquérir à tout élève les savoirs utiles et un certain degré de maîtrise technique, cette partie du programme a pour objectif prioritaire de permettre aux élèves de consolider les compétences fondamentales relatives à la résolution de problème et donc être capable de réagir sainement, et sans indication de marche à suivre, devant un problème et de conduire des raisonnements (analyse du problème, élaboration de stratégies ou du traitement à apporter, mise en œuvre du traitement, contrôle de la cohérence des résultats obtenus, exploitation) pour apporter une réponse à la question posée.

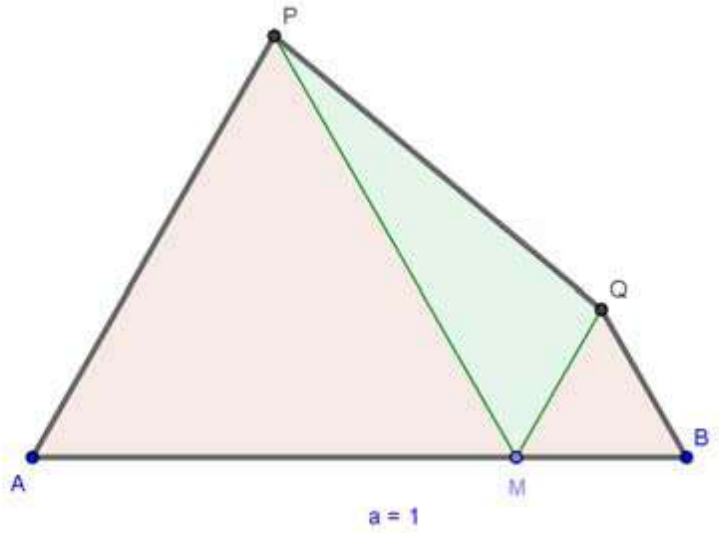
I problemi che ho deciso di proporre agli studenti sono tratti per lo più da problemi proposti dalle Accademie francesi, soprattutto nell'ambito delle sperimentazioni relative alla prova pratica di Matematica (cioè con l'ausilio delle nuove tecnologie), indicata con la sigla TP.

Tali esempi si possono trovare presso i seguenti siti:
http://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/textes_officiels/officiel2010/epreuve_pratique.htm
http://www-zope.ac-strasbourg.fr/sections/enseignements/secondaire/pedagogie/les_disciplines/mathematiques/tice/epreuves_pratiques
http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/lycee2010/mathsettice/seconde/fonctions/fonc2index.htm
È interessante consultare anche l'archivio didattico del Ministero dell'educazione francese:
http://eduscol.education.fr/maths/edubase

Inoltre nel documento di accompagnamento alla classe Premiere (marzo 2012) viene inserito come esempio di attività il seguente problema:

M est un point libre sur le segment [AB] de longueur 1. Les triangles AMP et MBQ sont équilatéraux.

1. Déterminer la position de M qui rend maximale l'aire du triangle MPQ.
2. Expliquer pourquoi cette position rend minimale l'aire du quadrilatère ABQP.



Anche le recenti Indicazioni nazionali per i Licei (in particolare per il Liceo Scientifico) sottolineano l'importanza di prendere confidenza con il linguaggio delle funzioni già dal primo biennio, non solo in modo astratto, ma anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni.

Obiettivo di studio sarà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.), anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico.

Lo studio delle funzioni del tipo $f(x) = ax + b$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ e la rappresentazione delle rette e delle parabole nel piano cartesiano consentiranno di acquisire i concetti di soluzione delle equazioni di primo e secondo grado in una incognita, delle disequazioni associate, e dei sistemi di equazioni lineari in due incognite, nonché le tecniche per la loro risoluzione grafica e algebrica.

Descrizione dell'attività

Materiali utilizzati

- Schede studenti
- Testo verifica 18 febbraio 2012;
- Esercizio in verifica del 15 marzo 2012

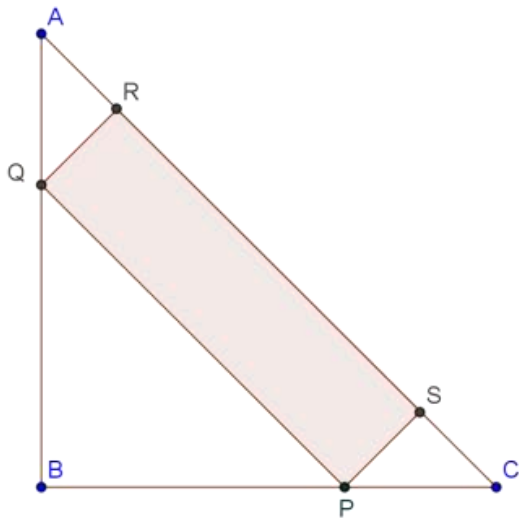
Traccia breve dell'attività:

Data	Scheda	Commento
14 gennaio	N. 1	Assaggio dell'attività: è stato affrontato praticamente solo il problema 1, che i ragazzi avevano già incontrato in una verifica scritta precedente.
21 gennaio	N. 2	Descrizione di quanto richiesto per la relazione
21 gennaio	N. 3	Il problema 1 si è rivelato troppo difficile per essere affrontato senza guida. Il problema 2 non è stato affrontato da nessuno ed è stato poi depennato dalle discussioni, essendo l'unico che non riguardava funzioni di secondo grado.
28 gennaio	N. 4	Abbiamo raggiunto, a mio parere, un buon livello di chiarezza e precisione nelle consegne degli esercizi; i ragazzi hanno capito che cosa devono fare esattamente; il lavoro di gruppo latita, nel senso che decidono di procedere svolgendo ognuno un esercizio diverso.
04 febbraio	N. 5	Idem come sopra
11 febbraio	N. 6	Descrizione del file che dovranno costruire
11 febbraio	N. 7	Scheda di riepilogo del lavoro fatto con qualche variante
15 febbraio	N.8	Scheda pensata, ma mai consegnata
18 febbraio	N.9	Testo della verifica in laboratorio. L'esercizio 1 era diverso per ogni studente; l'esercizio 2 era del primo tipo (studente sveglio) oppure del secondo (studente meno sveglio). L'esercizio facoltativo non è stato distribuito per mancanza di tempo.
18 febbraio	N.10	Scheda di valutazione dell'intera attività
15 marzo	N.11	Un esercizio dello stesso stile inserito nella prova di marzo in classe.
28 aprile	N. 12	Un'esercitazione con problemi da affrontare nell'ambito delle similitudini tra triangoli.

Scheda n. 1

Funzioni che nascono dalla geometria - 1

1) Riproduci con Geogebra la figura presente in un esercizio della verifica (riportata per comodità sulla scheda), ricordando che
   - Il triangolo ABC deve essere rettangolo isoscele;
   - Il punto P deve potersi muovere sul cateto al quale appartiene;
   - Il quadrilatero interno PQRS deve essere un rettangolo.



Considera la funzione che associa alla lunghezza di BP l'area del rettangolo PQRS e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce l'area al variare del punto P?

2) Costruisci con Geogebra un rettangolo di assegnato perimetro (la misura di tale perimetro ti verrà comunicata dall'insegnante).
   Ricorda che la costruzione deve permetterti di modificare il rettangolo, mantenendo invariato il perimetro.
   Considera la funzione che associa alla lunghezza di un lato del rettangolo l'area del rettangolo e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce l'area al variare del lato?

3) Costruisci con Geogebra un triangolo isoscele di assegnato perimetro (la misura di tale perimetro ti verrà comunicata dall'insegnante).
   Ricorda che la costruzione deve permetterti di modificare il triangolo, mantenendo invariato il perimetro.
   Considera la funzione che associa alla lunghezza di un lato del triangolo l'area del triangolo e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce l'area al variare del lato?

Scheda n.2

Protocollo per il lavoro a gruppi

1) Per ogni lezione in laboratorio il gruppo dovrà scegliere a turno un componente che stenda la relazione del lavoro svolto da consegnare all'insegnante il mercoledì successivo alla lezione in laboratorio.

2) Nella relazione devono essere indicati la data della lezione in laboratorio, i componenti del gruppo di lavoro e il nome chi è incaricato di scrivere la relazione.

3) Per ogni esercizio proposto nella scheda, la relazione deve contenere:

   - la spiegazione dettagliata e precisa di come è stata costruita con Geogebra la figura oggetto di studio;

   - la descrizione qualitativa dell'andamento della funzione da studiare, con le opportune osservazioni sugli eventuali casi limite;

   - l'espressione analitica della funzione da studiare, con la spiegazione dettagliata dei passaggi che conducono a tale espressione;

   - la dichiarazione relativa al fatto che la funzione tracciata per via empirica corrisponda o meno alla funzione tracciata da Geogebra inserendo l'espressione analitica trovata nella barra di inserimento.

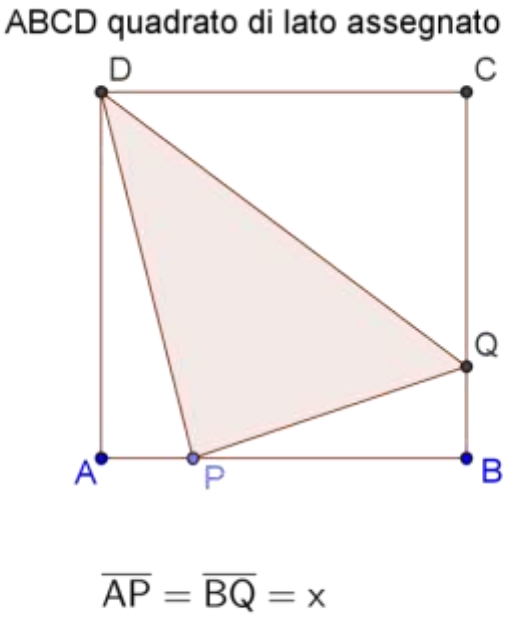
Scheda n. 3

Funzioni che nascono dalla geometria - 2

1) Costruisci con Geogebra un rettangolo di assegnato perimetro (la misura di tale perimetro ti verrà comunicata dall'insegnante).
   Ricorda che la costruzione deve permetterti di modificare il rettangolo, mantenendo invariato il perimetro.
   Considera la funzione che associa alla lunghezza di un lato del rettangolo l'area del rettangolo e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce l'area al variare del lato?

2) Costruisci con Geogebra un triangolo isoscele di assegnato perimetro (la misura di tale perimetro ti verrà comunicata dall'insegnante).
   Ricorda che la costruzione deve permetterti di modificare il triangolo, mantenendo invariato il perimetro.
   Considera la funzione che associa alla lunghezza di un lato del triangolo l'area del triangolo e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce l'area al variare del lato?

3) Costruisci con Geogebra la seguente figura



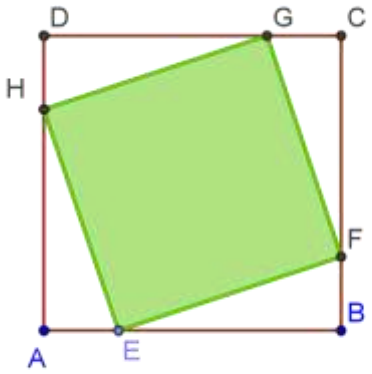
   Considera la funzione che associa alla lunghezza del segmento AP l'area del triangolo PQD e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce l'area al variare del segmento?

4) Considera un problema analogo al precedente, dove però il quadrilatero ABCD è un rettangolo di lati assegnati.

Scheda n.4

Funzioni che nascono dalla geometria - 3

1) Costruisci con Geogebra un quadrato ABCD di assegnato lato (la misura di tale lato ti verrà comunicata dall'insegnante).
Posiziona un punto E libero di muoversi sul lato AB e costruisci il quadrato EFGH rispettando i vincoli indicati nella figura seguente:



$$\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = x$$

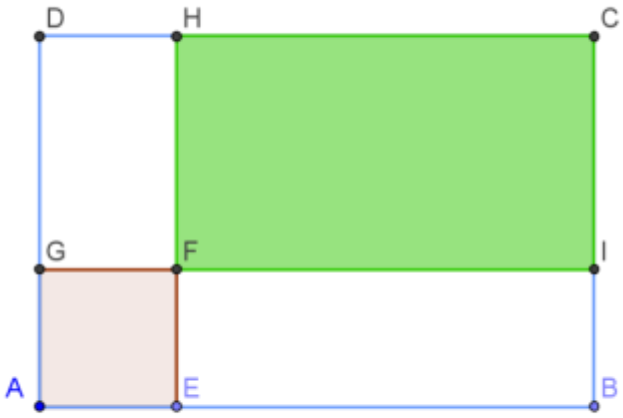
Considera la funzione che associa alla lunghezza del segmento AE l'area del quadrato EFGH e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce l'area al variare del segmento?

2) Costruisci con Geogebra una retta di equazione $y = mx + q$ con $m < 0$ e $q > 0$ (i valori del coefficiente angolare e dell'intercetta ti verranno comunicati dall'insegnante) ed indica con A e B i punti di intersezione rispettivamente con l'asse *x* e con l'asse *y*.
Posiziona un punto P libero di muoversi sul segmento AB e costruisci il rettangolo PMON come indicato in figura.

Considera la funzione che associa all'ascissa di P l'area del rettangolo PMON e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce l'area al variare del punto P?

3) Costruisci con Geogebra un rettangolo ABCD di assegnate dimensioni (le misure suoi lati ti verranno comunicate dall'insegnante).

   Posiziona un punto E libero di muoversi sul lato AB e costruisci il quadrato AEFG e il rettangolo FICH come indicato nella figura seguente:

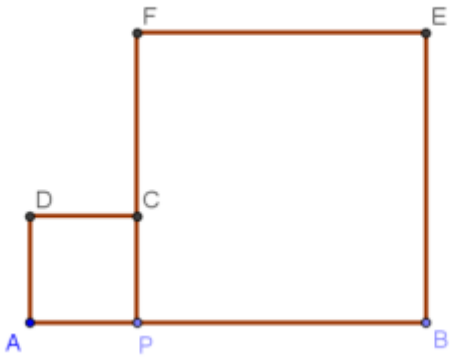


   Considera la funzione che associa alla lunghezza del segmento AE l'area della figura composta dal quadrato AEFG e dal rettangolo FICH e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce l'area al variare del segmento AE?

Scheda n. 5

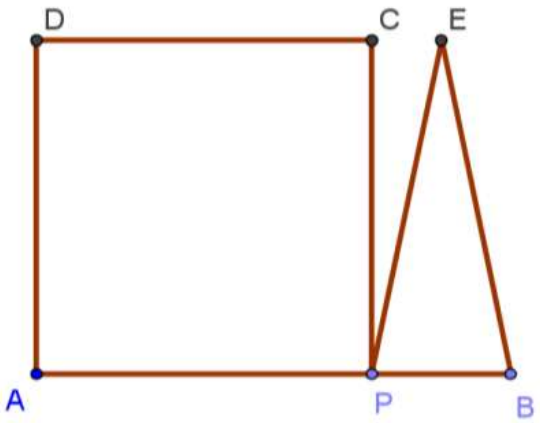
Funzioni che nascono dalla geometria - 4

1) Costruisci con Geogebra un segmento AB di lunghezza assegnata (la misura di tale segmento ti verrà comunicata dall'insegnante).
Posiziona un punto P libero di muoversi sul segmento AB e costruisci il quadrato APCD e il quadrato PBEF come illustrato in figura:



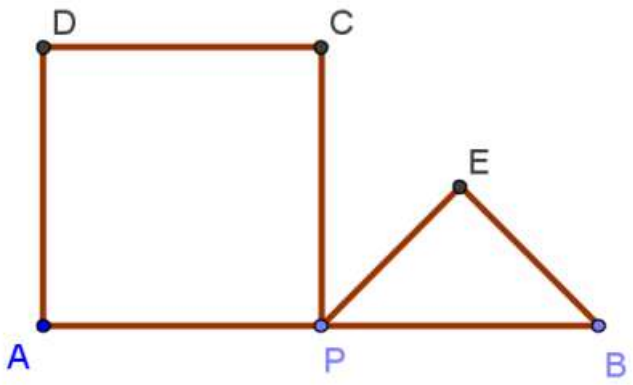
Considera la funzione che associa alla lunghezza del segmento AP la somma delle aree dei quadrati APCD e PBEF e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce tale funzione al variare del segmento AP?

2) Costruisci con Geogebra un segmento AB di lunghezza assegnata (la misura di tale segmento ti verrà comunicata dall'insegnante).
Posiziona un punto P libero di muoversi sul segmento AB e costruisci il quadrato APCD e il triangolo isoscele PBE con altezza uguale al lato di APCD come illustrato in figura:



Considera la funzione che associa alla lunghezza del segmento AP la somma delle aree dei quadrati APCD e del triangolo PBE e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce tale funzione al variare del segmento AP?

3) Costruisci con Geogebra un segmento AB di lunghezza assegnata (la misura di tale segmento ti verrà comunicata dall'insegnante).
   Posiziona un punto P libero di muoversi sul segmento AB e costruisci il quadrato APCD e il triangolo isoscele rettangolo PBE come illustrato in figura:



Suggerimento per la costruzione: l'altezza del triangolo deve essere …

4) Considera la funzione che associa alla lunghezza del segmento AP la somma delle aree dei quadrati APCD e del triangolo PBE e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce tale funzione al variare del segmento AP?

Scheda n. 6

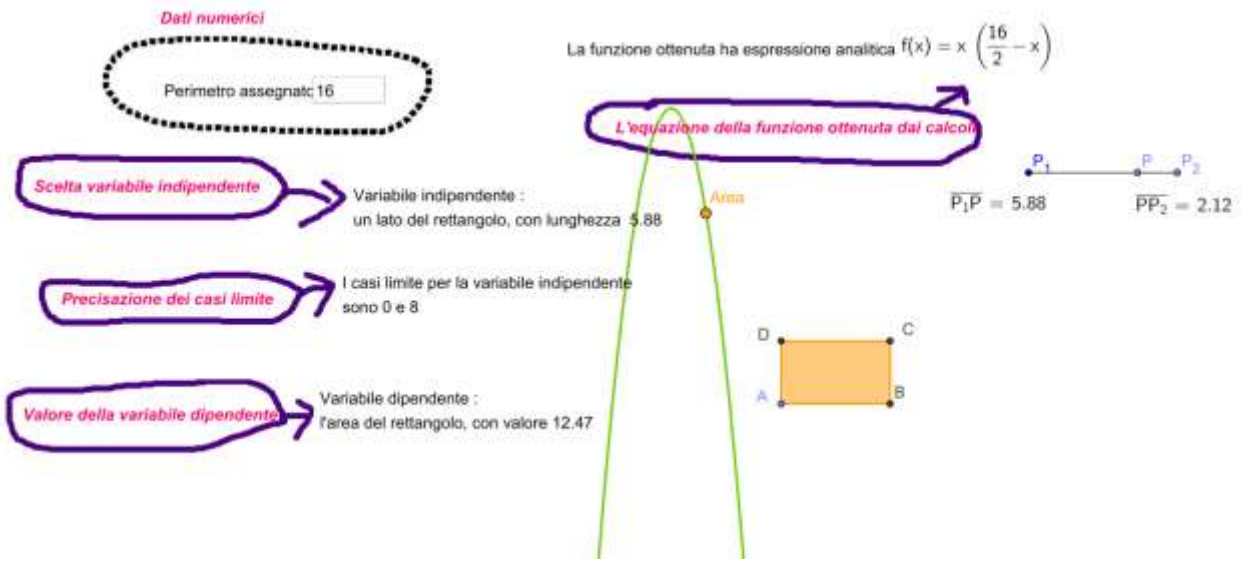
Funzioni che nascono dalla geometria: riepilogo

Per il problema che ti verrà assegnato dall'insegnante tra i 10 problemi del foglio di riepilogo, costruisci un file di Geogebra che deve contenere le informazioni seguenti:

- Dati iniziali (in genere una o più lunghezze);
- Scelta della variabile indipendente (in genere, la lunghezza di un segmento, oppure la coordinata di un punto);
- La precisazione di casi limite che riguardano la variabile indipendente;
- Il valore numerico assunto dalla variabile dipendente (in genere la misura di un'area);
- L'espressione analitica della funzione che lega la variabile indipendente alla variabile dipendente.

Ognuna di queste voci deve essere presente nel file di Geogebra e si deve aggiornare quando vengono modificati i dati iniziali e/o la variabile indipendente.

Come esempio puoi tener presente la figura seguente che mostra la schermata del file relativo al problema isoperimetrico del rettangolo.

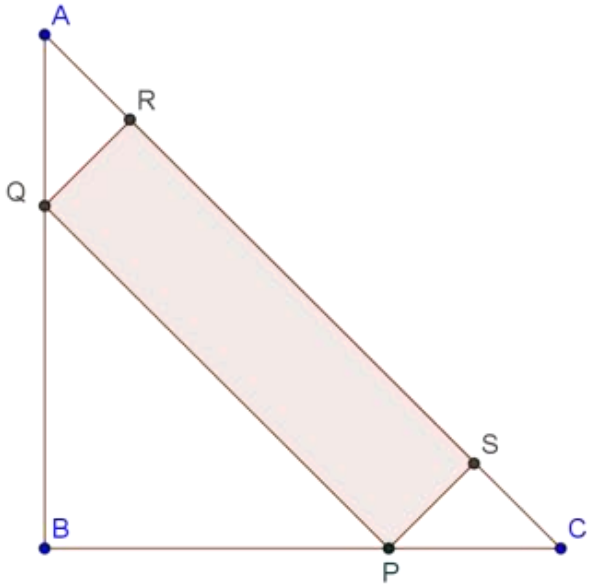


Scheda n. 7

Funzioni che nascono dalla geometria: problemi affrontati

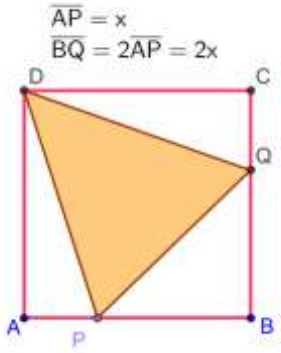
Problema	Data di riferimento
P1	laboratorio 14 gennaio 2012
P2	classe 8 febbraio 2012
P3	variazione laboratorio 21 gennaio 2012
P4	laboratorio 28 gennaio 2012
P5	variazione laboratorio 28 gennaio 2012
P6	laboratorio 28 gennaio 2012
P7	laboratorio 28 gennaio 2012
P8	laboratorio 04 febbraio 2012
P9	laboratorio 04 febbraio 2012
P10	laboratorio 04 febbraio 2012

1) Costruisci con Geogebra nel triangolo rettangolo isoscele ABC con cateto di misura a la figura seguente, in cui il punto P deve potersi muovere sul cateto al quale appartiene e il quadrilatero interno PQRS deve essere un rettangolo.

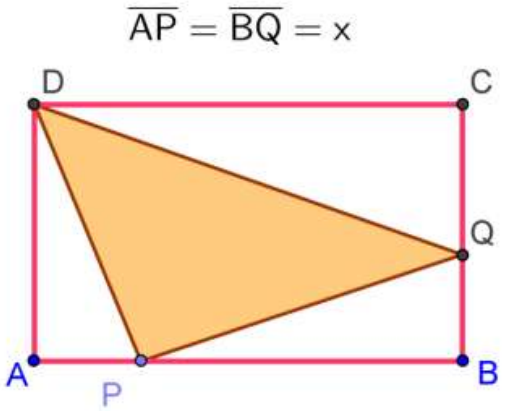


Considera la funzione che associa alla lunghezza di BP l'area del rettangolo PQRS e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce l'area al variare del punto P?

2) Costruisci con Geogebra in un quadrato di lato a la seguente figura in cui il punto P appartiene al lato AB e il punto Q al lato BC in modo che $\overline{BQ} = 2\overline{AP}$ Considera la funzione che associa alla lunghezza del segmento AP l'area del triangolo PQD e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce l'area al variare del segmento?



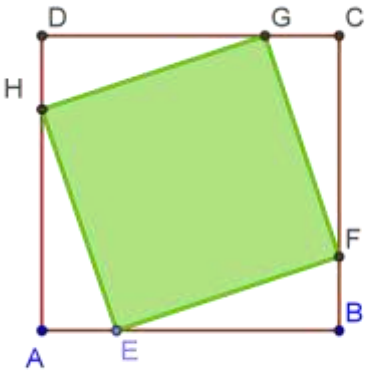
3) Costruisci con Geogebra in un rettangolo di lati a e b la seguente figura



ABCD rettangolo di lati assegnati

Considera la funzione che associa alla lunghezza del segmento AP l'area del triangolo PQD e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce l'area al variare del segmento?

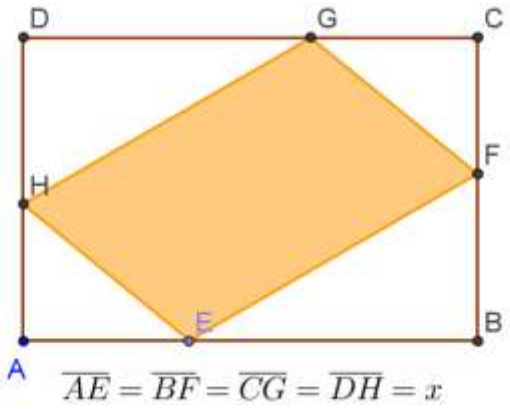
4) Costruisci con Geogebra un quadrato ABCD di lato a.
Posiziona un punto E libero di muoversi sul lato AB e costruisci il quadrato EFGH rispettando i vincoli indicati nella figura seguente:



$$\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = x$$

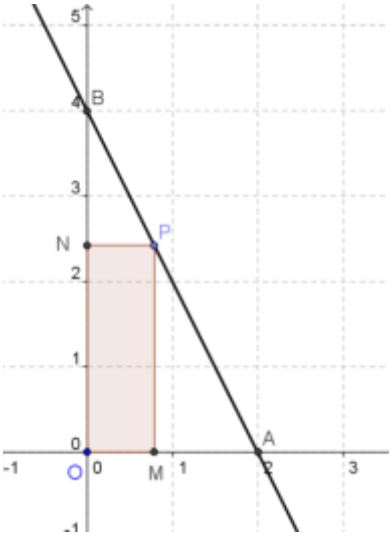
Considera la funzione che associa alla lunghezza del segmento AE l'area del quadrato EFGH e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce l'area al variare del segmento?

5) Costruisci con Geogebra un rettangolo ABCD di lati a e b.
Posiziona un punto E libero di muoversi sul lato AB e costruisci il quadrilatero EFGH rispettando i vincoli indicati nella figura seguente:



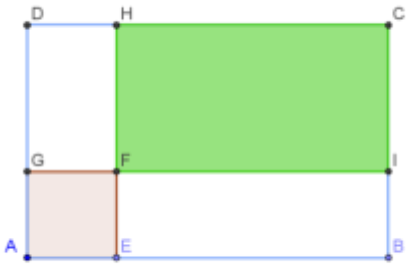
Considera la funzione che associa alla lunghezza del segmento AE l'area del quadrilatero EFGH e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce l'area al variare del segmento?

6) Costruisci con Geogebra una retta di equazione $y = mx + q$ con $m < 0$ e $q > 0$ ed indica con A e B i punti di intersezione rispettivamente con l'asse *x* e con l'asse *y*.
Posiziona un punto P libero di muoversi sul segmento AB e costruisci il rettangolo PMON come indicato in figura.



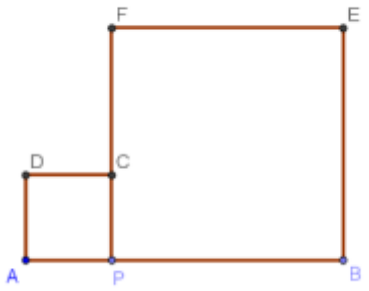
Considera la funzione che associa all'ascissa di P l'area del rettangolo PMON e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce l'area al variare del punto P?

7) Costruisci con Geogebra un rettangolo ABCD di lati a e b.
Posiziona un punto E libero di muoversi sul lato AB e costruisci il quadrato AEFG e il rettangolo FICH come indicato nella figura seguente:



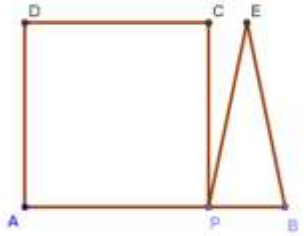
Considera la funzione che associa alla lunghezza del segmento AE l'area della figura composta dal quadrato AEFG e dal rettangolo FICH e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce l'area al variare del segmento AE?

8) Costruisci con Geogebra un segmento AB di lunghezza a.
Posiziona un punto P libero di muoversi sul segmento AB e costruisci il quadrato APCD e il quadrato PBEF come illustrato in figura a lato



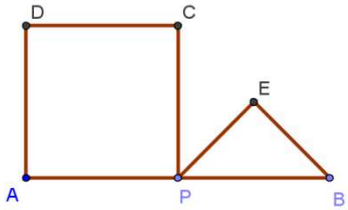
Considera la funzione che associa alla lunghezza del segmento AP la somma delle aree dei quadrati APCD e PBEF e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce tale funzione al variare del segmento AP?

9) Costruisci con Geogebra un segmento AB di lunghezza a.
Posiziona un punto P libero di muoversi sul segmento AB e costruisci il quadrato APCD e il triangolo isoscele PBE con altezza uguale al lato di APCD come illustrato in figura:



Considera la funzione che associa alla lunghezza del segmento AP la somma delle aree dei quadrati APCD e del triangolo PBE e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce tale funzione al variare del segmento AP?

10) Costruisci con Geogebra un segmento AB di lunghezza *a*
Posiziona un punto P libero di muoversi sul segmento AB e costruisci il quadrato APCD e il triangolo isoscele rettangolo PBE come illustrato in figura:



Suggerimento per la costruzione: l'altezza del triangolo deve essere …

Considera la funzione che associa alla lunghezza del segmento AP la somma delle aree dei quadrati APCD e del triangolo PBE e tracciane il grafico; quali considerazioni qualitative puoi fare sui cambiamenti che subisce tale funzione al variare del segmento AP?

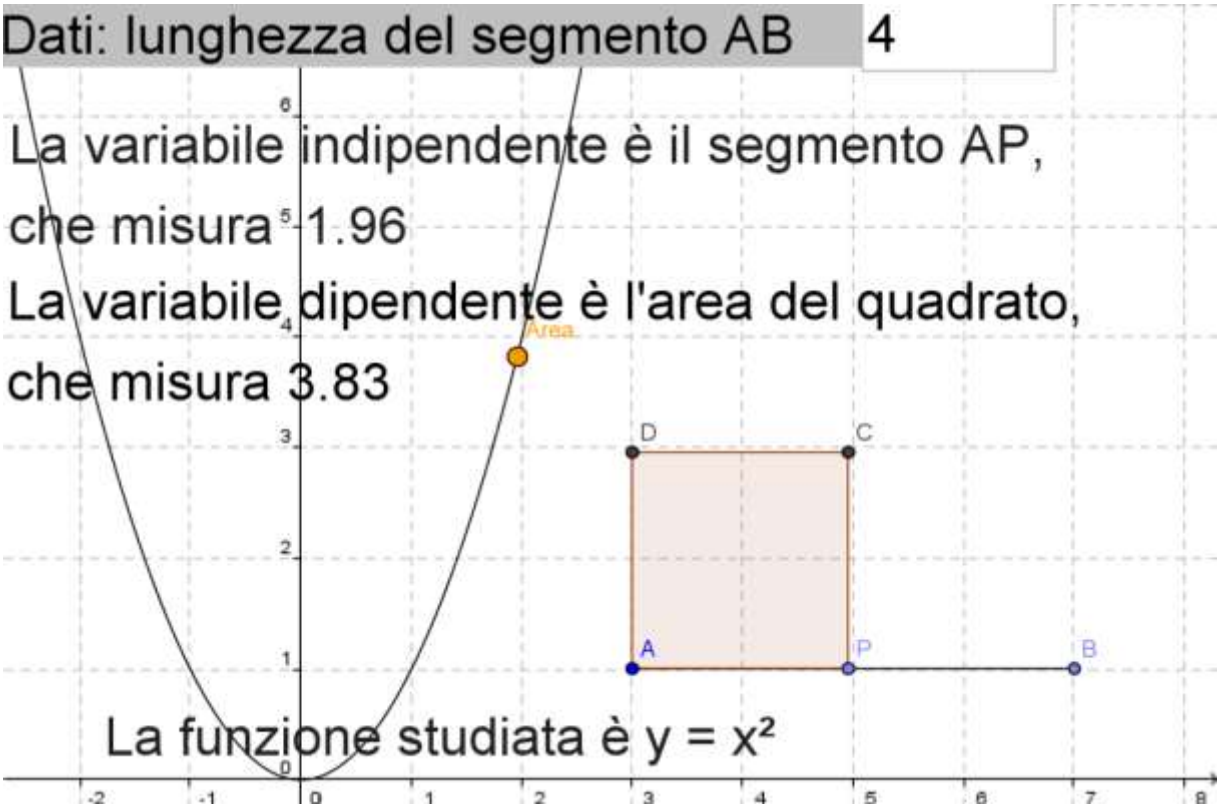
Scheda n. 8

Funzioni che nascono dalla geometria: esempio di protocollo di costruzione

Il protocollo si riferisce al semplice problema-esempio:

> *Dato un segmento AB di lunghezza l, posizionare un punto P sul segmento AB e studiare la funzione che associa alla lunghezza di AP l'area del quadrato APCD di lato AP.*

La figura che si ottiene è la seguente:



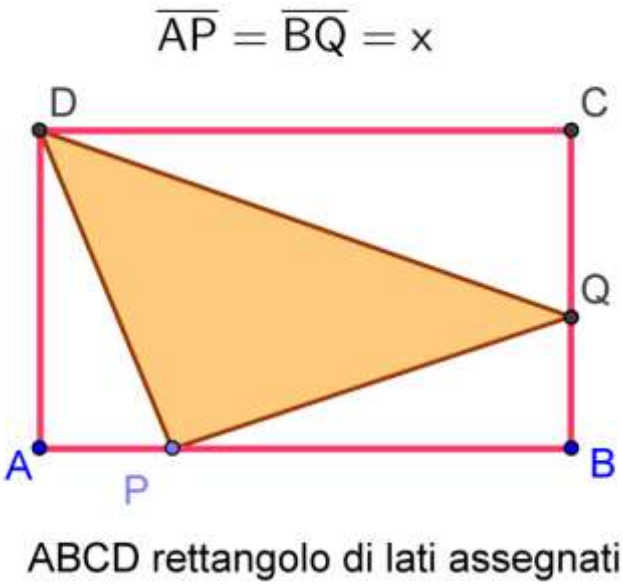
N.	Nome	Definizione	Valore	Legenda
1	Numero l		l = 4	Inserisco i dati iniziali (in questo caso lunghezza del segmento), che rappresenta/no il/i parametri del problema
2	Punto A		A = (3, 1)	Creo un punto
3	Punto B	Punto su Circonferenza[A, l]	B = (7, 1)	Creo un punto B a distanza l da A
4	Segmento a	Segmento [A, B]	a = 4	Creo il segmento AB
5	Punto P	Punto su a	P = (4.96, 1)	Creo un punto P su AB
6	Quadrilatero poli1	Poligono[A, P, 4]	poli1 = 3.83	Creo un quadrato di lato AP (passo 1)
6	Punto C	Poligono[A, P, 4]	C = (4.96, 2.96)	Creo un quadrato di lato AP (passo 2)
6	Punto D	Poligono[A, P, 4]	D = (3, 2.96)	Creo un quadrato di lato AP (passo 3)
6	Segmento a_1	Segmento [A, P] di Quadrilatero poli1	a_1 = 1.96	Creo un quadrato di lato AP (passo 4)
6	Segmento p	Segmento [P, C] di Quadrilatero poli1	p = 1.96	Creo un quadrato di lato AP(passo 5)
6	Segmento b	Segmento [C, D] di Quadrilatero poli1	b = 1.96	Creo un quadrato di lato AP (passo 6)
6	Segmento c	Segmento [D, A] di Quadrilatero poli1	c = 1.96	Creo un quadrato di lato AP (passo 7)
7	Campo testo campo1	CampoTesto[l]	campo1	Dati: lunghezza del segmento AB *(disponibile solo in Geogebra 4)*
8	Numero d	Distanza tra A e P	d = 1.96	Creo un numero pari alla distanza di A da P
9	Testo testo1	"La variabile indipendente è il segmento AP, che misura " + d + ""	La variabile indipendente è il segmento AP, che misura 1.96	Metto in evidenza qual è la variabile indipendente (che indicherò con x)
10	Testo testo2	"La variabile dipendente è l'area del quadrato, che misura " + poli1 + ""	La variabile dipendente è l'area del quadrato, che misura 3.83	Metto in evidenza la variabile dipendente (che indicherò con y)
11	Punto Area	(d, poli1)	Area = (1.96, 3.83)	Creo il punto che rappresenta la relazione tra le due variabili
12	Parabola e		e: $y = x^2$	Scrivo la funzione che collega le due variabili (la ottengo facendo i calcoli con carta penna e testa)
13	Testo testo3	"La funzione studiata è " + e + ""	La funzione studiata è $y = x^2$	Metto in evidenza l'equazione della funzione trovata

Scheda n. 9

Verifica tipo 1

1. Considera il problema P3 affrontato nel percorso "*Le funzioni che nascono dalla geometria*" del quale si riporta per comodità il testo:

   Costruisci con Geogebra in un rettangolo di lati a e b la seguente figura



ABCD rettangolo di lati assegnati

   Considera la funzione che associa alla lunghezza del segmento AP l'area del triangolo PQD.

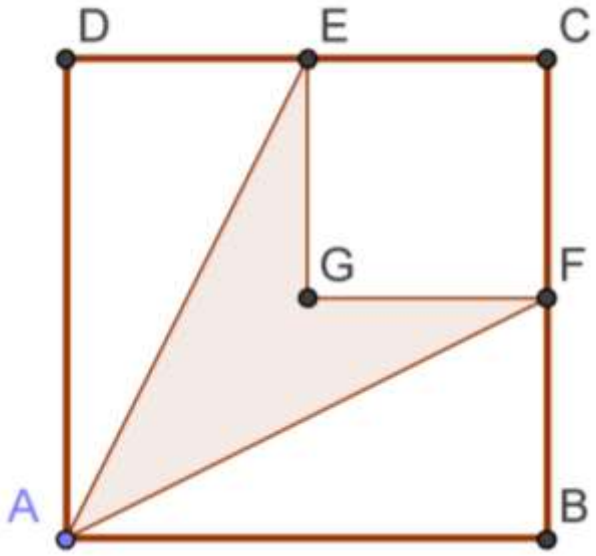
   Utilizzando il file relativo P3.ggb che trovi nella cartella indicata alla lavagna, prova a rispondere alle seguenti domande, considerando un rettangolo di lati AB=10 e BC=16

Quesito	**Risposta**
Trovare per quale posizione di P l'area del triangolo è 60.	
Trovare per quale posizione di P l'area del triangolo è minima.	

   Successivamente rispondi alle stesse domande senza utilizzare il software, svolgendo i calcoli necessari sul foglio protocollo.

   Confronta i risultati ottenuti nei due modi (con Geogebra e con carta, penna e testa).

2. Costruisci con Geogebra un quadrato ABCD di lato 6, nel quale inscrivere il motivo colorato AEGF come indicato in figura, in modo che ECGF sia un quadrato:



Nel file di Geogebra devono essere presenti le seguenti informazioni, in evidenza sulla vista grafica:

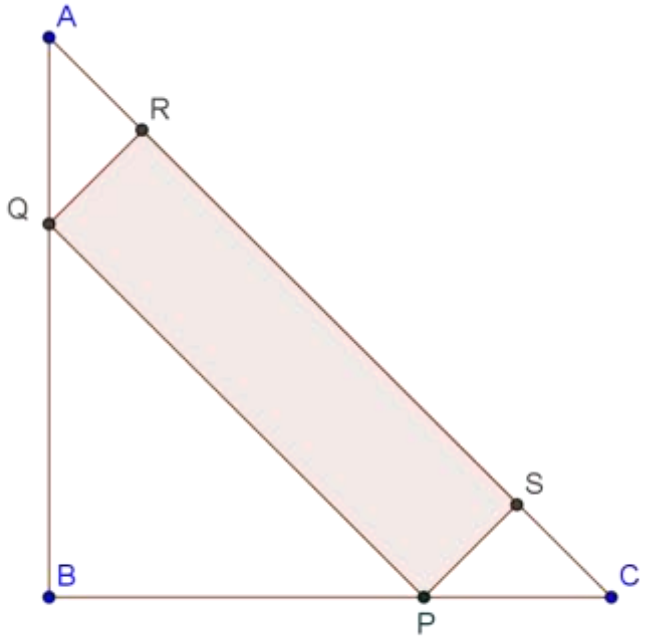
- Il valore numerico assunto dalla variabile indipendente, che in questo caso è la lunghezza del segmento CE, con il punto E libero di muoversi sul lato CD;
- La precisazione dei casi limite per la variabile indipendente;
- Il valore numerico assunto dalla variabile dipendente , che in questo caso è l'area del poligono colorato AEGF;
- Un punto P che rappresenti la relazione tra la variabile indipendente e la variabile dipendente, con traccia attiva;
- L'espressione analitica della funzione che lega la variabile indipendente alla variabile dipendente.

Salva il file creato nella tua cartella con il nome es2_18feb2012_MioCognome

Mostra, eseguendo i calcoli sul foglio protocollo, come hai trovato l'espressione analitica della funzione e controlla che la traccia del punto P al variare della posizione del punto E si sovrapponga al grafico della funzione trovata.

Verifica tipo 2

1. Considera il problema P1 affrontato nel percorso "*Le funzioni che nascono dalla geometria"* del quale si riporta per comodità il testo:
Costruisci con Geogebra nel triangolo rettangolo isoscele ABC con cateto di misura a la figura seguente, in cui il punto P deve potersi muovere sul cateto al quale appartiene e il quadrilatero interno PQRS deve essere un rettangolo.



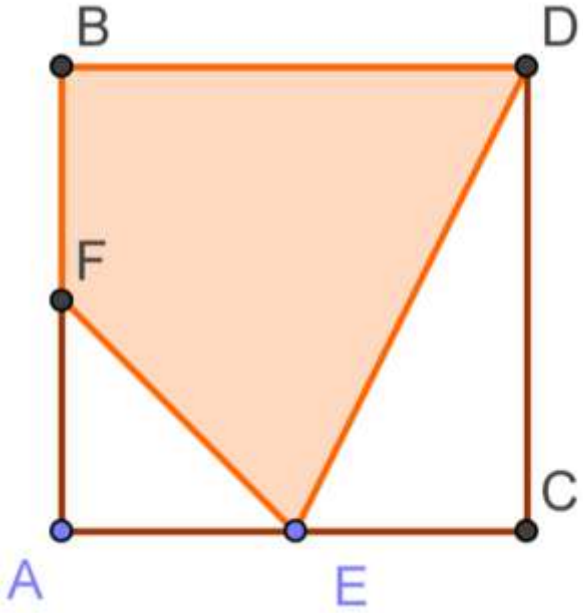
Considera la funzione che associa alla lunghezza di BP l'area del rettangolo PQRS.

Utilizzando il file relativo P1.ggb che trovi nella cartella indicata alla lavagna, prova a rispondere alle seguenti domande, considerando un triangolo rettangolo di lati AB=BC=7

	Quesito	**Risposta**
	Trovare per quale posizione di P l'area del rettangolo è 5.	
	Trovare per quale posizione di P l'area del rettangolo è massima.	

Successivamente rispondi alle stesse domande senza utilizzare il software, svolgendo i calcoli necessari sul foglio protocollo.
Confronta i risultati ottenuti nei due modi (con Geogebra e con carta, penna e testa).

2. Costruisci con Geogebra un quadrato ABCD di lato 6, nel quale inscrivere il motivo colorato EDBF come indicato in figura, in modo che AF=AE:



Nel file di Geogebra devono essere presenti le seguenti informazioni, in evidenza sulla vista grafica:

- Il valore numerico assunto dalla variabile indipendente, che in questo caso è la lunghezza del segmento AE, con il punto E libero di muoversi sul lato AC;
- La precisazione dei casi limite per la variabile indipendente;
- Il valore numerico assunto dalla variabile dipendente , che in questo caso è l'area del poligono colorato EDBF;
- Un punto P che rappresenti la relazione tra la variabile indipendente e la variabile dipendente, con traccia attiva;
- L'espressione analitica della funzione che lega la variabile indipendente alla variabile dipendente.

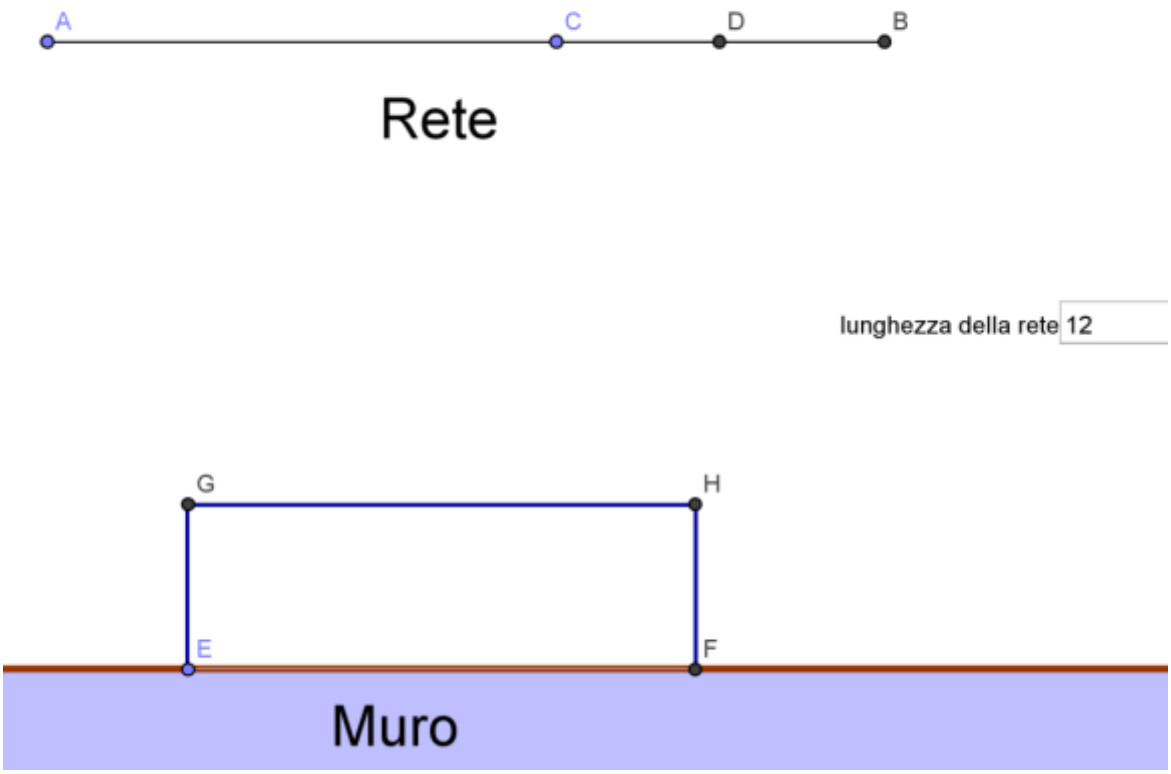
Salva il file creato nella tua cartella con il nome es2_18feb2011_MioCognome

Mostra, eseguendo i calcoli sul foglio protocollo, come hai trovato l'espressione analitica della funzione e controlla che la traccia del punto P al variare della posizione del punto E si sovrapponga al grafico della funzione trovata.

Esercizio facoltativo

Svolgi l'esercizio n. 3 solo se hai completato per intero i primi due esercizi.

3. Con una rete metallica lunga 12 metri, si vuole costruire un recinto rettangolare per un cavallo, accostandolo ad un muro già esistente. Come si deve disporre la rete in modo che l'area racchiusa sia la massima possibile?
   Pensa a come impostare un file di Geogebra che possa essere utile per rispondere alla domanda; la tua insegnante ha utilizzato un file, la cui vista grafica si presenta come nella figura seguente:



Salva il file creato nella tua cartella con il nome es3_18feb2011_MioCognome e rispondi per iscritto al quesito proposto sul foglio protocollo, descrivendo la costruzione geometrica fatta e le conclusioni alle quali sei pervenuto.

Scheda n. 10 di valutazione dell'intera attività

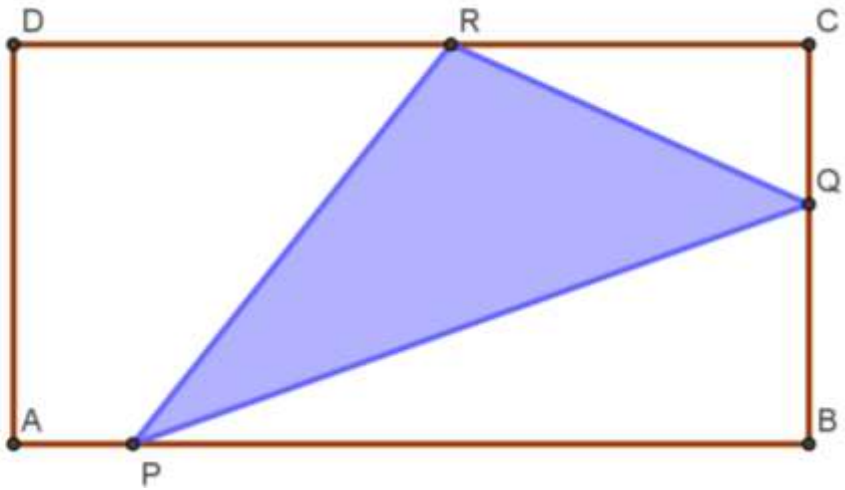
Attività	Giudizio		Peso
Relazione di laboratorio	Chiarezza espositiva		20%
	Presenza errori concettuali		
	Completezza		
Prima consegna di relazioni			+1/4 di voto
Costruzione file di Geogebra			10%
Presentazione del file in classe			10%
Verifica in laboratorio	Utilizzo file		60%
	Parte analitica		
	Esercizio nuovo		
Valutazione			

Scheda n.11

Si consideri un rettangolo ABCD con $\overline{AB} = 8 \text{ cm}$ e $\overline{BC} = 4 \text{ cm}$. Sul lato AB, si scelga un punto P, sul lato BC un punto Q e sul lato CD un punto R, rispettando i vincoli indicati in figura

$\overline{BQ} = 2\overline{AP}$

$\overline{RC} = 3\overline{AP}$

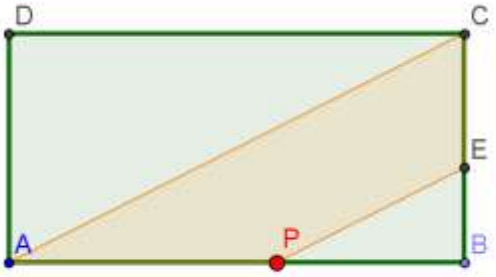


a) Si determini la lunghezza di AP, in modo che l'area del triangolo colorato PQR sia 10 cm^2;
b) Qual è l'area minima del triangolo colorato PQR? Qual è l'area massima?

Scheda n. 12

Funzioni che nascono dalla geometria - 5

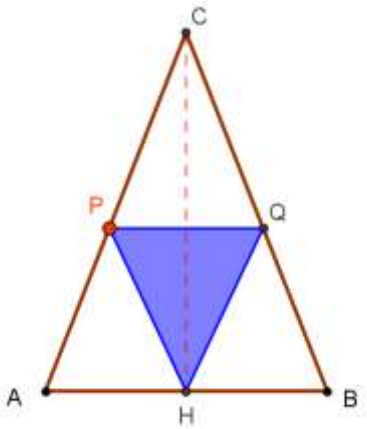
1) Costruisci con Geogebra un rettangolo ABCD di dimensioni assegnate (le misure dei lati ti verranno comunicate dall'insegnante). Traccia la diagonale AC.
Posiziona un punto P libero di muoversi sul segmento AB e traccia la retta passante per P parallela al segmento AC; tale retta interseca il segmento BC nel punto E (come illustrato in figura).



Crea un punto denominato AREA, che abbia come ascissa la misura del segmento $\overline{AP}$ e come ordinata la misura dell'area del trapezio ACEP.
Considera la funzione AREA, che associa alla lunghezza del segmento AP l'area del trapezio ACEP e rappresenta tale relazione con il punto AREA; rendi attiva la traccia del punto AREA e muovi il punto P.
Descrivi sul foglio protocollo:

- I casi limite per la variabile indipendente $\overline{AP}$;
- l'andamento qualitativo della funzione AREA, riportando il grafico ottenuto con la traccia del punto AREA;
- i valori massimi e minimi della funzione AREA.

2) Costruisci con Geogebra un triangolo isoscele ABC isoscele sulla base AB di dimensioni assegnate (le misure della base e dei lati obliqui ti verranno comunicate dall'insegnante). Traccia l'altezza relativa alla base CH. Posiziona un punto P libero di muoversi sul segmento AC e traccia la retta passante per P parallela al segmento AB; tale retta interseca il segmento BC nel punto Q (come illustrato in figura).



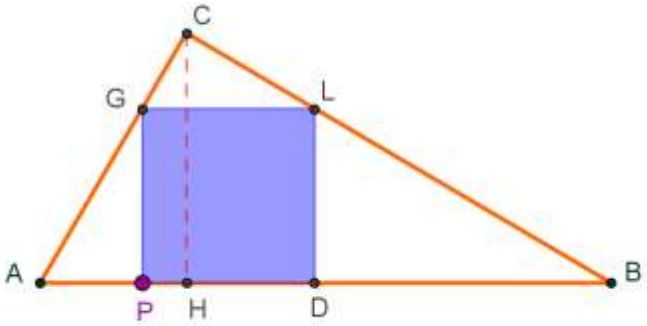
Crea un punto denominato AREA, che abbia come ascissa la misura del segmento $\overline{AP}$ e come ordinata la misura dell'area del triangolo PQH.
Considera la funzione AREA, che associa alla lunghezza del segmento AP l'area del triangolo PQH e rappresenta tale relazione con il punto AREA; rendi attiva la traccia del punto AREA e muovi il punto P.
Descrivi sul foglio protocollo:

- I casi limite per la variabile indipendente $\overline{AP}$;
- l'andamento qualitativo della funzione AREA, riportando il grafico ottenuto con la traccia del punto AREA;
- i valori massimi e minimi della funzione AREA.

Crea un punto denominato AREABIS, che abbia come ascissa la misura del segmento $\overline{PQ}$ e come ordinata la misura dell'area del triangolo PQH.
Considera la funzione AREABIS, che associa alla lunghezza del segmento PQ l'area del triangolo PQH e rappresenta tale relazione con il punto AREABIS; rendi attiva la traccia del punto AREABIS e muovi il punto P.
Descrivi sul foglio protocollo:

- I casi limite per la variabile indipendente $\overline{PQ}$;
- l'andamento qualitativo della funzione AREABIS, riportando il grafico ottenuto con la traccia del punto AREABIS;
- i valori massimi e minimi della funzione AREABIS.

3) Costruisci con Geogebra un triangolo ABC rettangolo in C di assegnati cateto e ipotenusa (le misure del cateto e dell'ipotenusa ti verranno comunicate dall'insegnante).
Traccia l'altezza CH relativa all'ipotenusa. Posiziona un punto P libero di muoversi sul segmento AH; traccia la retta passante per P perpendicolare al segmento AB; tale retta interseca il segmento AC nel punto G; traccia la retta passante per G e parallela al segmento AB; tale retta interseca il segmento BC nel punto L; traccia la retta passante per L e perpendicolare al segmento AB; tale retta interseca il segmento AB nel punto D (come illustrato in figura).



Crea un punto denominato AREA, che abbia come ascissa la misura del segmento $\overline{AP}$ e come ordinata la misura dell'area del rettangolo PDLG.
Considera la funzione AREA, che associa alla lunghezza del segmento AP l'area del rettangolo PDLG e rappresenta tale relazione con il punto AREA; rendi attiva la traccia del punto AREA e muovi il punto P.

Descrivi sul foglio protocollo:

- I casi limite per la variabile indipendente $\overline{AP}$;
- l'andamento qualitativo della funzione AREA, riportando il grafico ottenuto con la traccia del punto AREA;
- i valori massimi e minimi della funzione AREA.

Per mercoledì 2 maggio completa sul foglio protocollo la risoluzione dei problemi:

- indica con x la variabile indipendente e utilizzando proprietà geometriche a te note ricava l'espressione della funzione AREA;
- traccia il grafico della funzione AREA, rispettando i vincoli imposti dal problema
- controlla che il grafico da te tracciato corrisponda al grafico qualitativo ricavato con l'utilizzo di Geogebra.

Osservazioni:

- Ogni studente ha dovuto fare la relazione su 3 problemi, costruire il file su un quarto problema, risolvere il primo esercizio della prova su un quinto problema: in totale dovrebbe aver analizzato con cura 5 problemi dei vari proposti.

Derivata

Angela Aldrighetti, Istituto di Istruzione "M. Curie" – Pergine

Scheda riassuntiva

Sperimentazione in classe del software di geometria dinamica Geogebra anno scolastico 2011/2012

Docente

ANGELA ALDRIGHETTI
ISTITUTO DI ISTRUZIONE M. CURIE - Pergine Valsugana

Classe coinvolta

4 ITI

Numero di alunni per classe

17

Periodo dell'anno

GENNAIO-FEBBRAIO

Argomenti trattati

DERIVATA

Obiettivi di apprendimento

Visualizzare il concetto di derivata e la sua utilità per la determinazione dei massimi e minimi.

Modalità di lavoro

INDIVIDUALE, SULLE POSTAZIONI AL COMPUTER IN AULA INFORMATICA.
Non sono state utilizzate schede preparate dall'insegnante, ma le attività si sono svolte discutendo con gli studenti davanti al foglio geogebra le procedure da eseguire.

Modalità di registrazione del lavoro da parte degli studenti

APPUNTI SUL QUADERNO, FILE DA SALVARE

Eventuale compresenza di colleghi

Presente ITP

Numero unità orarie impiegate

6

Tipologia di verifica

NON E' STATA ESEGUITA VERIFICA

Valutazione dell'attività

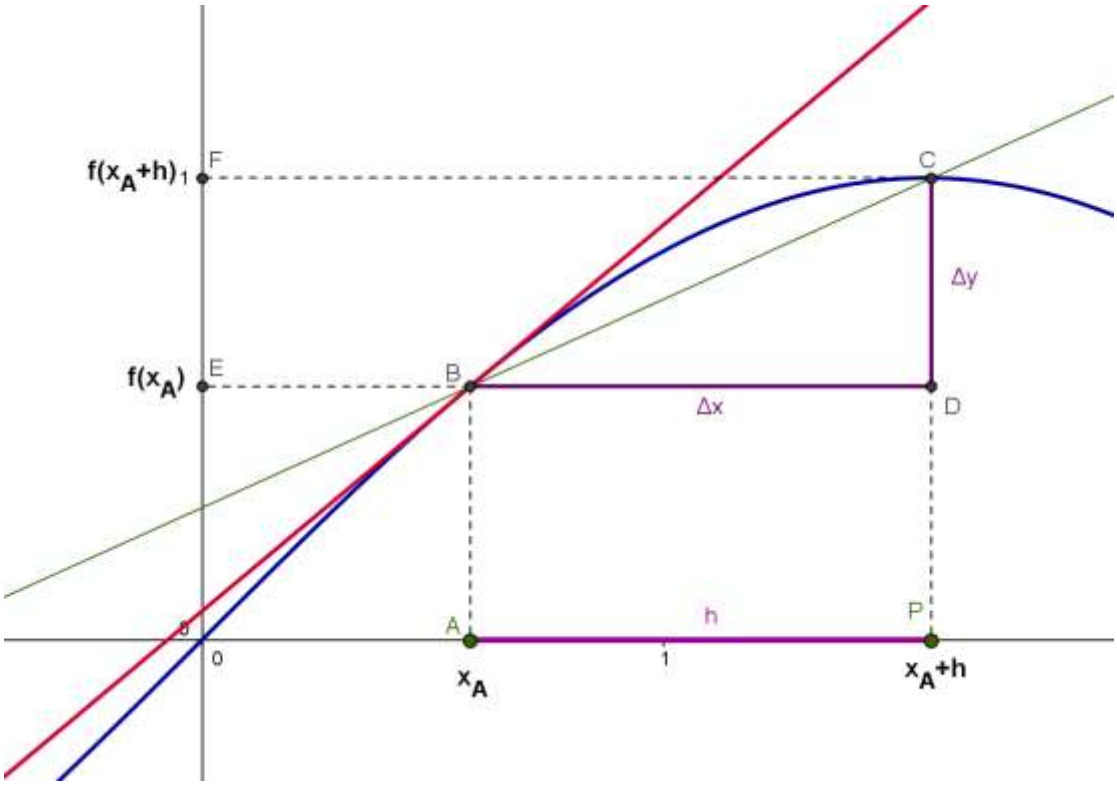
Positiva dal punto di vista dell'apprendimento, tutti gli studenti erano interessati e ognuno portava il proprio apporto alla costruzione del file.
Scopo delle attività era

- visualizzare i concetti appresi
- dedurre alcune derivate fondamentali
- determinare l'importanza della derivata per la crescenza e decrescenza della funzione

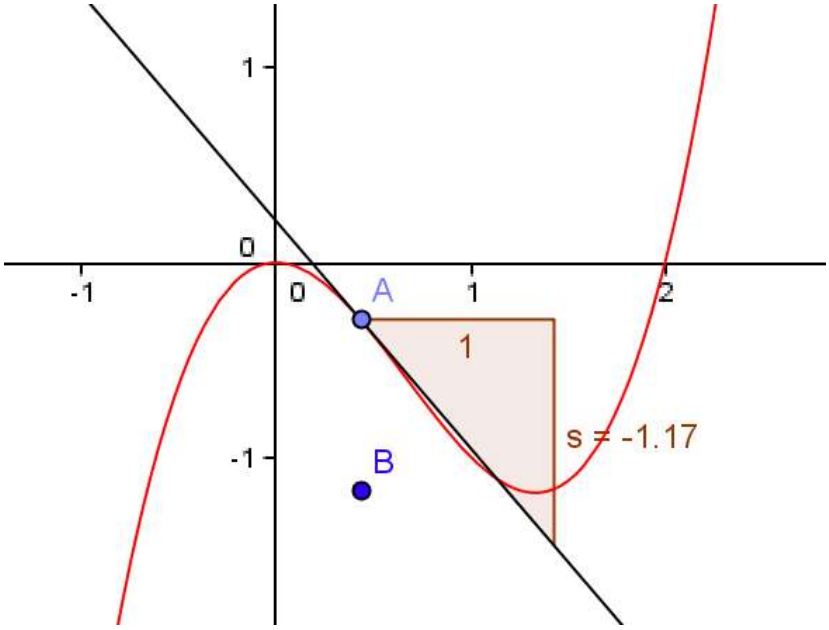
File allegati: • schede di lavoro • esempi di file ggb utilizzati o prodotti dagli studenti • eventuale descrizioni di percorsi • eventuali note per gli studenti	4 FILE DEFINIZIONE DI DERIVATA [file derivata definizione.ggb] DERIVATA DI FUNZIONI ELEMENTARI(2) . [file derivata e tangente1.ggb, derivata e tangente2.ggb] CRESCENZA E DECRESCENZA [file funzione crescente, decrescente... .ggb]
Proposta di descrizione del percorso: Per ogni lezione (o per gruppi di lezioni) riportare 1. contenuti 2. attività proposte agli studenti con riferimento esplicito alle schede utilizzate 3. interazione con gli studenti 4. valutazione a posteriori dell'efficacia dell'intervento, con eventuali proposte di modifiche.	

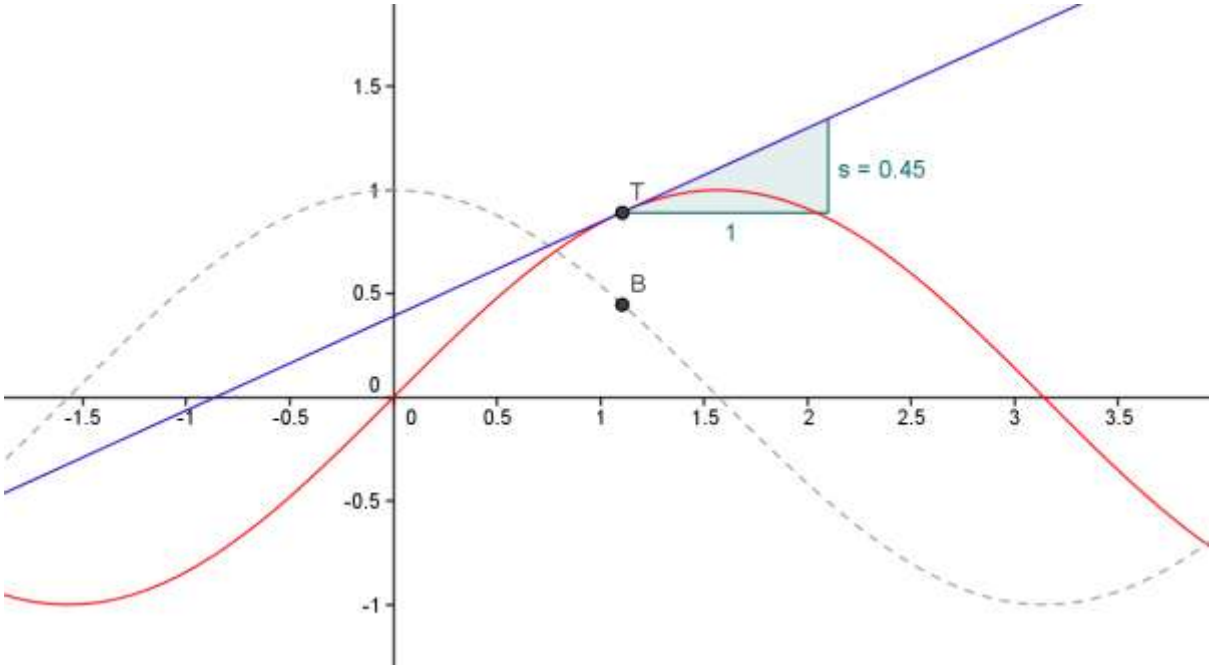
Descrizione dell'attività

Prima consegna: costruire la definizione di derivata precedentemente data in classe. Ho suggerito la funzione da considerare (sen x). [file **DerivataDefinizione.ggb**]

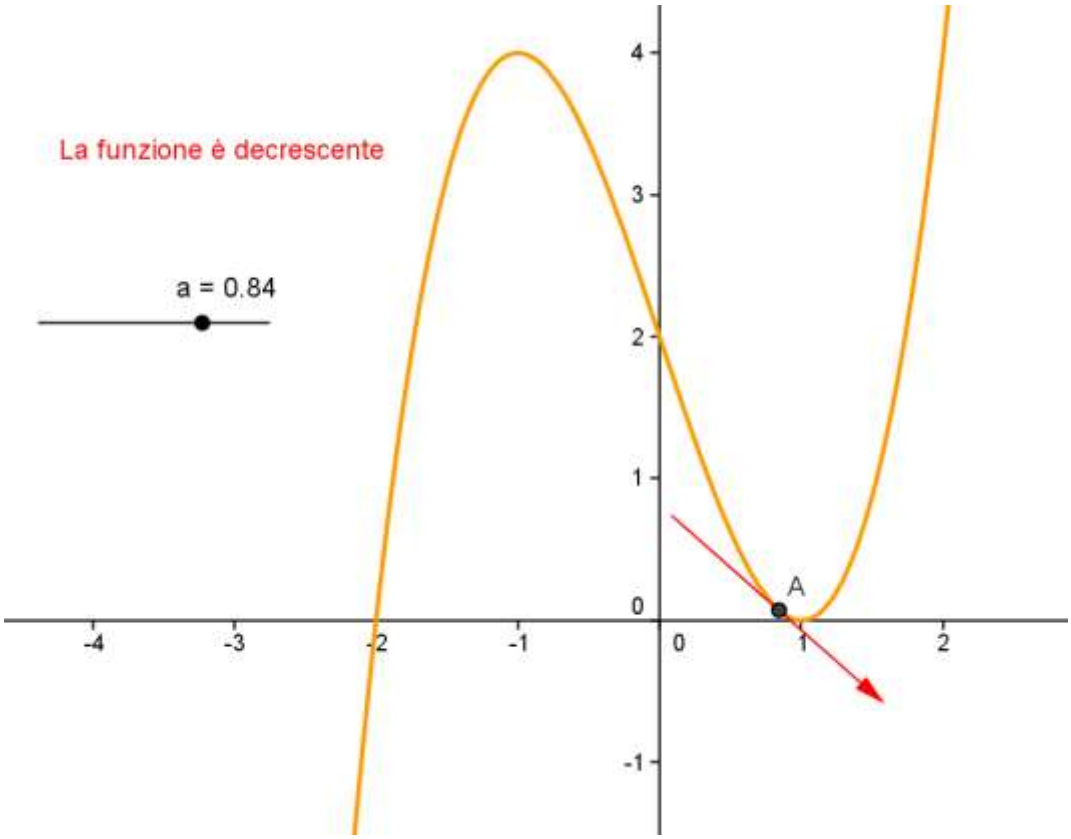


Seconda consegna: determinare la derivata di funzione con modalità traccia. [file **Derivata_Tangente1.ggb**, **Derivata_Tangente2.ggb**]


1
0
-1
0
A
1
2
1
s = -1.17
-1
B


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
T
s = 0.45
1
B

Terza consegna: crescenza e decrescenza e punti stazionari. [file **f_CrescenteDecrescentePuntiStazionari.ggb**]



Equazioni differenziali

Stefano Pegoretti, Istituto di Istruzione "G. Floriani" – Riva del Garda

Scheda riassuntiva

Docente, Istituto Scolastico e Sede
Pegoretti Stefano - ITI Floriani Riva del Garda

Eventuale compresenza di colleghi
No

Classe/i coinvolta/e, Indirizzo di studi, Numero di alunni per classe
5 ITI elettrotecnica (4 ore matematica) 15 studenti

Periodo dell'anno (data inizio – data fine)
Marzo 2012

Argomenti trattati
Soluzione numerica di equazioni differenziali del primo ordine

Obiettivi di apprendimento
Accanto ai Metodi numerici per la soluzione di equazioni anche quello per la Soluzione numerica di equazioni differenziali del primo ordine.
Utilizzare il concetto di differenziale per "costruire" la soluzione.

Modalità di lavoro
individuale al computer in aula informatica, con lavagna interattiva.
Le attività sono state costruite in modo partecipato dal docente e man mano dagli studenti…

Modalità di registrazione del lavoro da parte degli studenti
File da salvare, appunti sul quaderno

Numero unità orarie impiegate e loro consistenza
Costruzione con 4 ore da 50'

Tipologia di verifica
Verifiche orali e scritte sul significato di soluzione di equazioni differenziali del primo ordine

Esiti della verifica
Ad esempio in simulazione della terza prova è stato proposta la seguente domanda:
Verifica che le che le curve integrali dell'equazione y^' (x-3)=3y passano tutte per il punto P(3,0) e determina quindi l'integrale particolare che verifica la condizione iniziale y(0)=1.
I risultati sono stati positivi con nessun insufficiente, e 2/3 della classe con soluzione completa

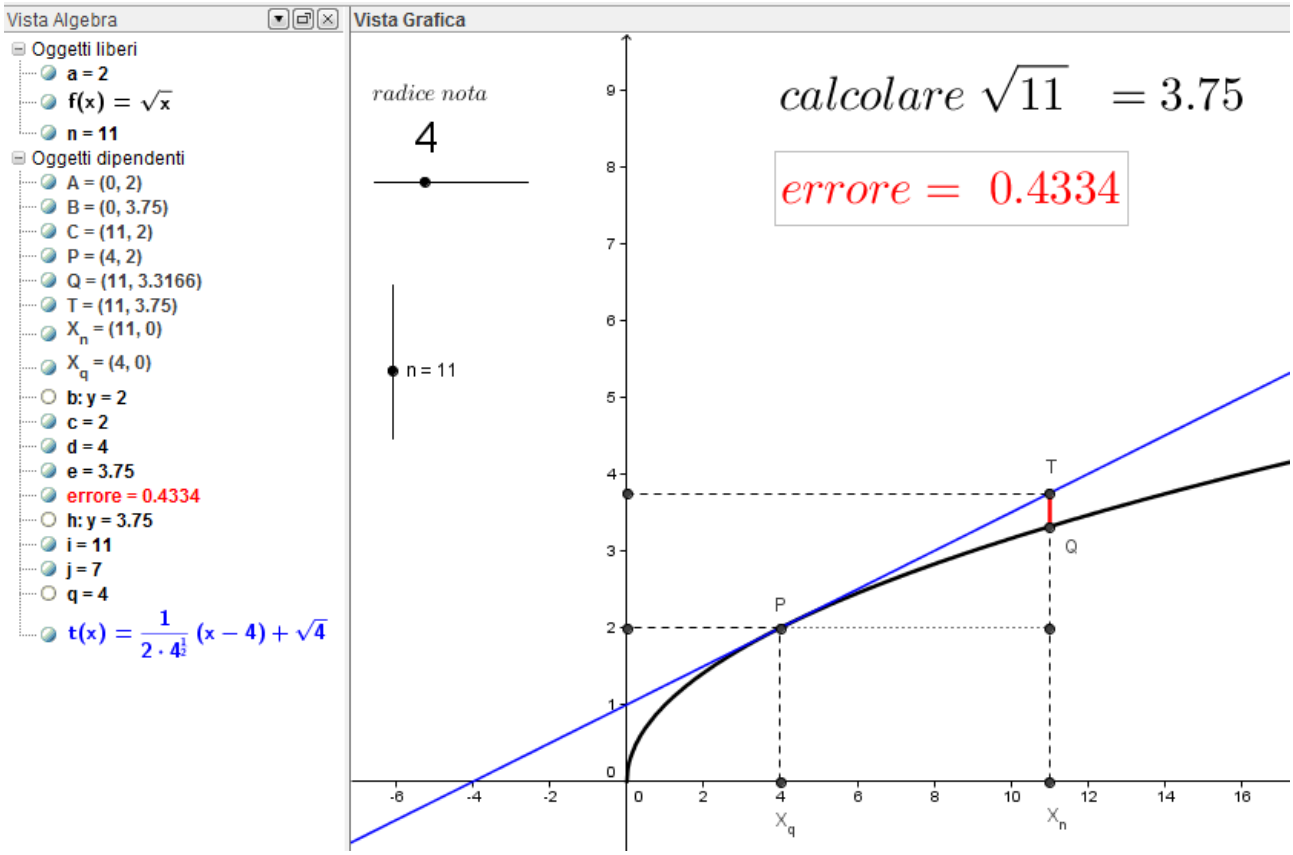
Valutazione dell'attività
La valutazione è positiva per il buon consolidamento di concetti che altrimenti sarebbero acquisiti solo a livello formale. Il coinvolgimento il gradimento da parte degli studenti è stato ottimo e particolarmente congeniale ad un indirizzo di studi che predilige un "*approccio concreto*".

Descrizione dell'attività

Dopo un percorso abbastanza approfondito sul calcolo integrale la mia quinta ITI indirizzo elettrotecnica non ha avuto particolari difficoltà nell'affrontare lo studio delle equazioni differenziali. L'unico problema è sorto nel definire l'insieme di funzioni soluzione dell'equazione, o meglio, l'uso della costante nell'integrale generale.

Prima di affrontare la soluzione numerica con il metodo delle tangenti, ho però proposto un 'attività di "ripasso" sul significato geometrico del differenziale:

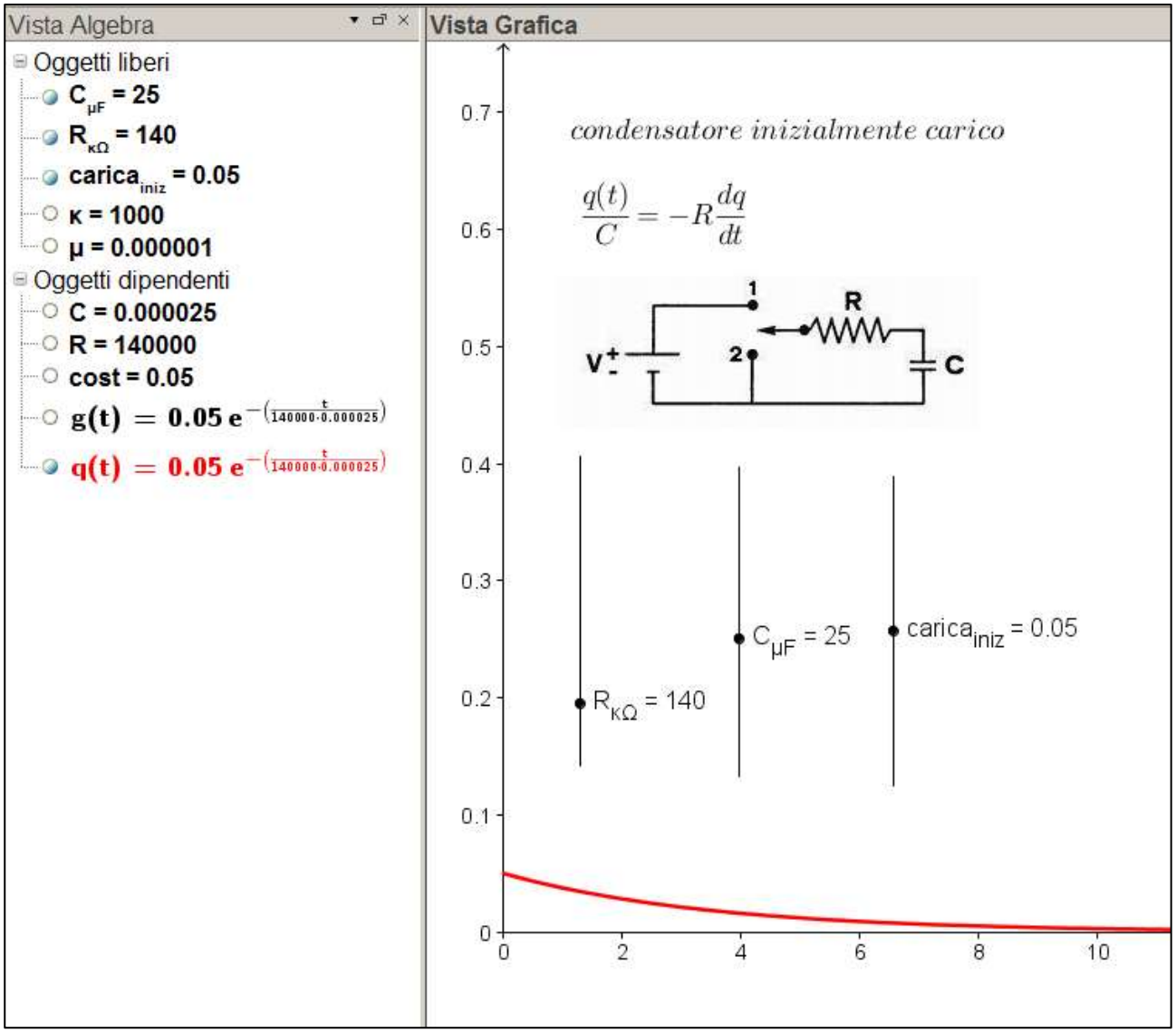
1. Determinare la radice quadrata di un numero a partire da una radice nota.
   (file 01_significato_geom_differenziale.ggb)



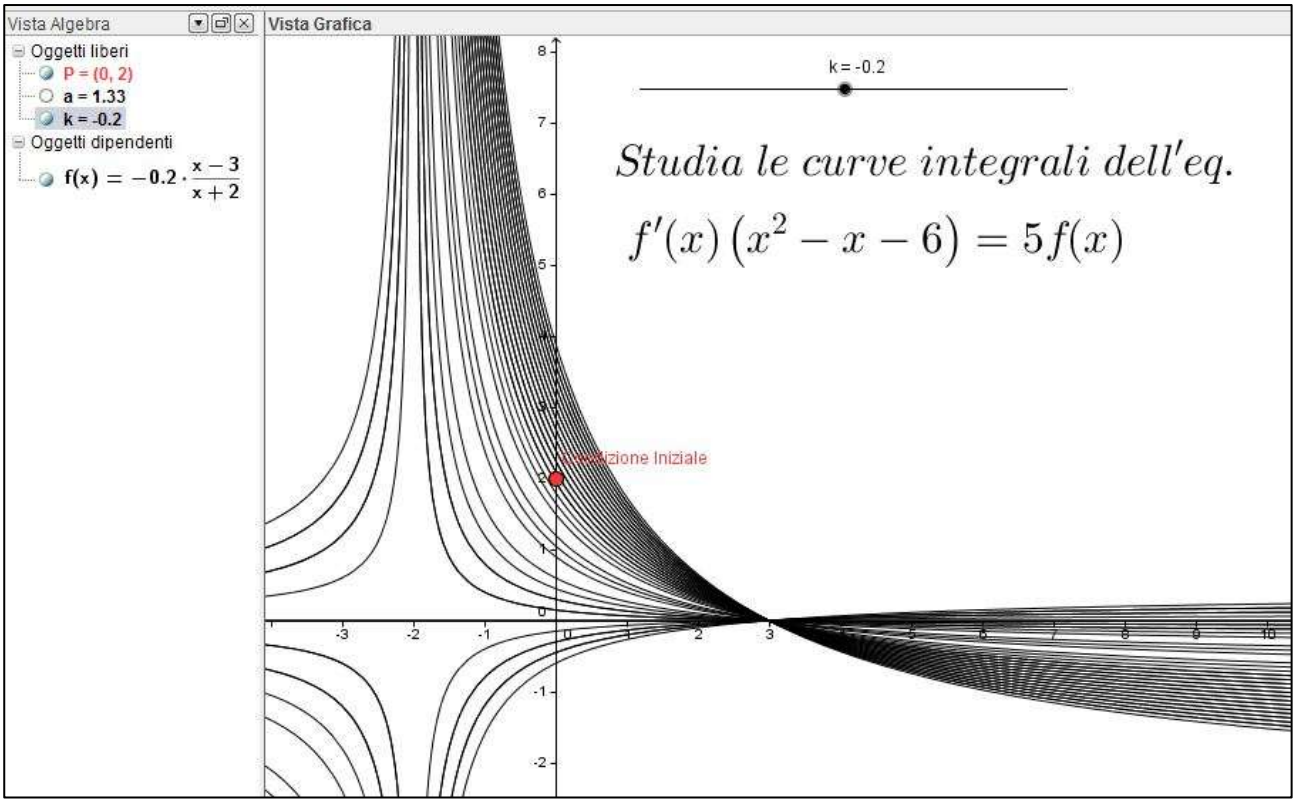
Si può verificare che scegliendo il punto abbastanza vicino ad una radice nota si può approssimare il valore utilizzando la tangente (si confrontino le soluzioni con calcolo della radice di 11 a partire dalla radice di 4, oppure a partire dalla radice di 9 dove l'approssimazione è migliore).

Siamo poi passati ad affrontare il problema di calcolare le soluzioni numeriche di equazioni differenziali.
In "*automatico*", reduci dal calcolo integrale, gli studenti immaginavano l'insieme delle funzioni soluzione sempre come funzioni traslate prive di possibili punti comuni.
Per ovviare a questo problema ho deciso di introdurre con Geogebra delle attività che esprimessero graficamente i due seguenti problemi.

2. Circuito RC (carico e scarico) (vedi file 02_Circuito_R_C.ggb)

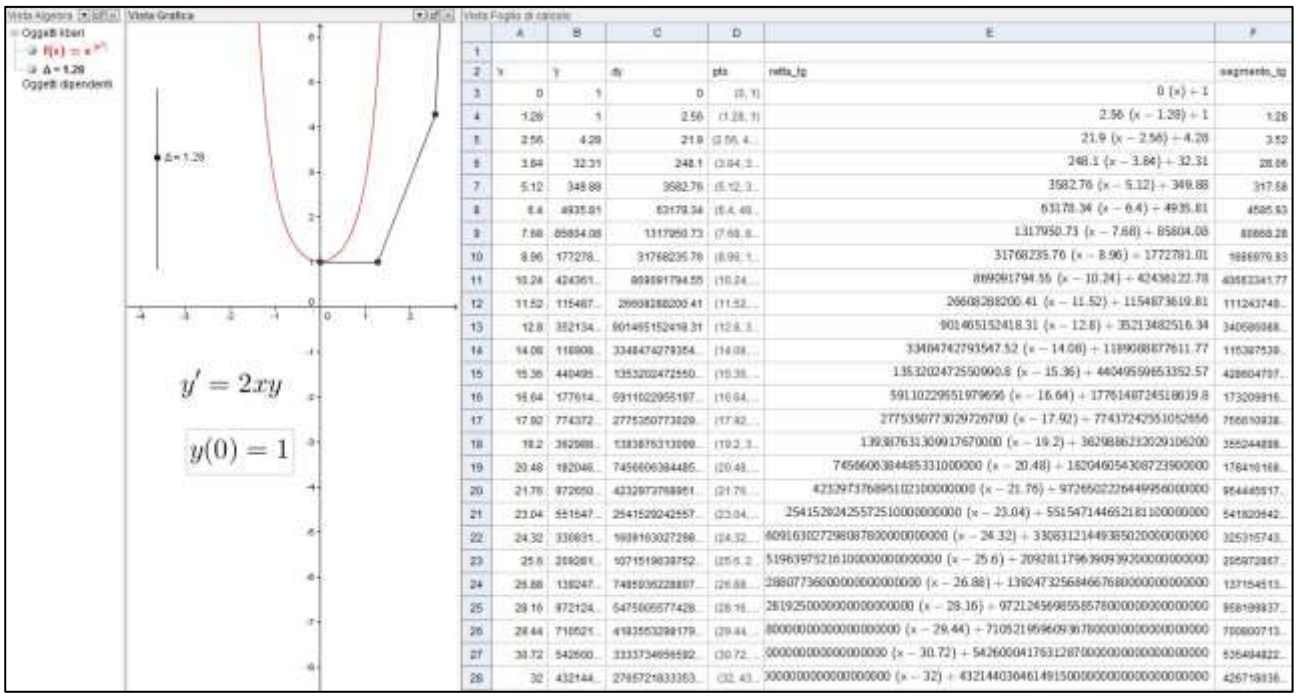


3. Studia le curve integrali della seguente equazione differenziale: $y'(x^2 - x - 6) = 5y$ (punto in comune) . Individua poi quella che passa per P(0,2) (vedi file 03_Eq_diff_per_un_pto.ggb)



Modificando il parametro k si visualizzano le curve integrali passanti tutte per il punto (3,0). Tra queste scegliamo quella con condizione iniziale (0,2)

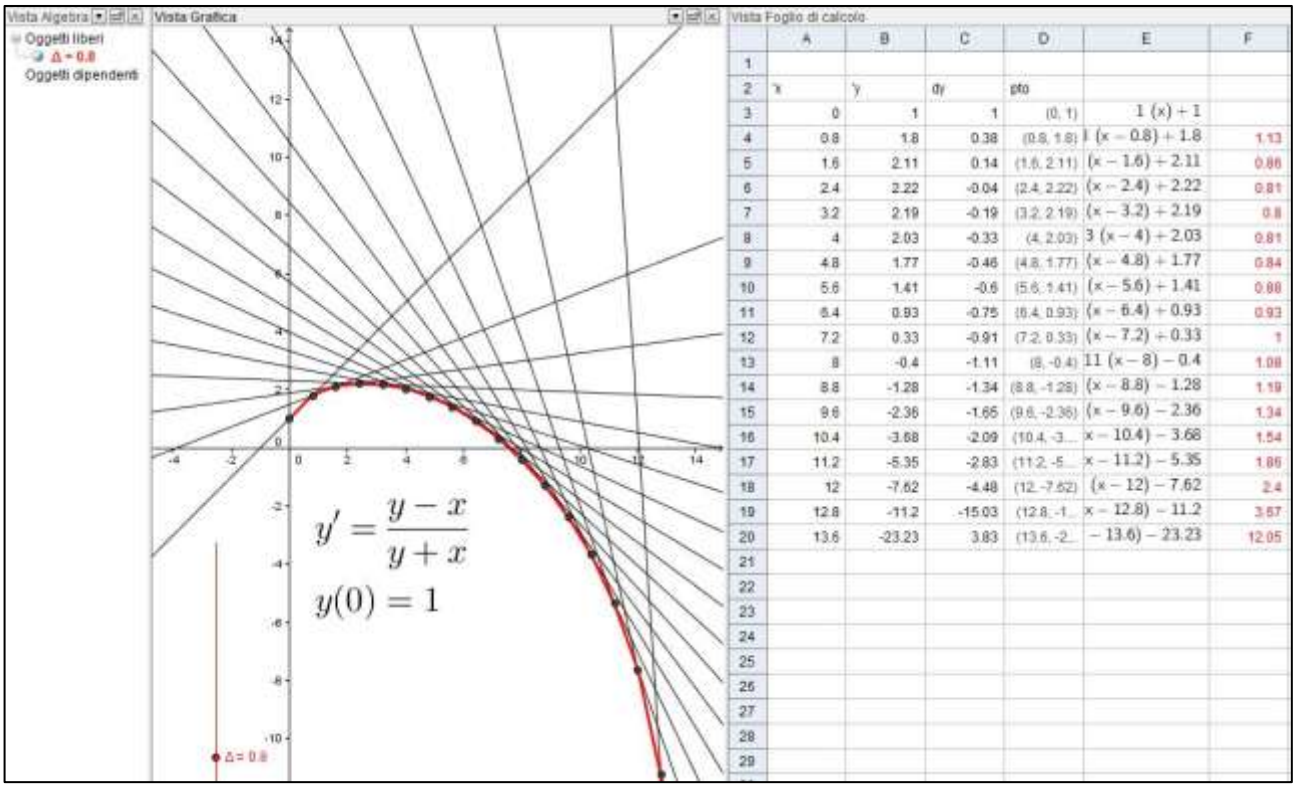
4. Dopo aver chiarito il significato del Problema di Cauchy e di curva integrale si presenta il problema della ricerca della soluzione numerica dell'equazione differenziale $y' = 2xy$ con condizione iniziale $y(0) = 1$ .Il grafico in rosso rappresenta la soluzione analitica da approssimare (vedi file 04_metodo_eulero_sol_facile.ggb)



Con il parametro delta si può migliorare l'approssimazione della funzione soluzione.

Chiarito il problema ho utilizzato ancora geogebra per la ricerca di una soluzione numerica utilizzando il metodo di Eulero.
La efficiente e flessibile relazione tra foglio di calcolo e grafico ha permesso di costruire un modello del metodo di Eulero molto vicino a come l'avrei esposto disponendo di una normale lavagna.

5. Come ulteriore applicazione ho proposto la ricerca della soluzione dell'equazione differenziale $y' = \frac{y-x}{y+x}$ con condizione iniziale $y(0) = 1$ analoga a quella proposta nella simulazione della terza prova (vedi file 05_metodo_eulero_sol_difficile.ggb)



	A	B	C	D	E	F
1						
2	x	y	dy	pto		
3	0	1	1	(0, 1)	1 (x) + 1	
4	0.8	1.8	0.38	(0.8, 1.8)	1 (x − 0.8) + 1.8	1.13
5	1.6	2.11	0.14	(1.6, 2.11)	(x − 1.6) + 2.11	0.86
6	2.4	2.22	-0.04	(2.4, 2.22)	(x − 2.4) + 2.22	0.81
7	3.2	2.19	-0.19	(3.2, 2.19)	(x − 3.2) + 2.19	0.8
8	4	2.03	-0.33	(4, 2.03)	3 (x − 4) + 2.03	0.81
9	4.8	1.77	-0.46	(4.8, 1.77)	(x − 4.8) + 1.77	0.84
10	5.6	1.41	-0.6	(5.6, 1.41)	(x − 5.6) + 1.41	0.88
11	6.4	0.93	-0.75	(6.4, 0.93)	(x − 6.4) + 0.93	0.93
12	7.2	0.33	-0.91	(7.2, 0.33)	(x − 7.2) + 0.33	1
13	8	-0.4	-1.11	(8, -0.4)	11 (x − 8) − 0.4	1.08
14	8.8	-1.28	-1.34	(8.8, -1.28)	(x − 8.8) − 1.28	1.19
15	9.6	-2.36	-1.65	(9.6, -2.36)	(x − 9.6) − 2.36	1.34
16	10.4	-3.68	-2.09	(10.4, -3...	x − 10.4) − 3.68	1.54
17	11.2	-5.35	-2.83	(11.2, -5...	x − 11.2) − 5.35	1.86
18	12	-7.62	-4.48	(12, -7.62)	(x − 12) − 7.62	2.4
19	12.8	-11.2	-15.03	(12.8, -1...	x − 12.8) − 11.2	3.67
20	13.6	-23.23	3.83	(13.6, -2...	− 13.6) − 23.23	12.05
21						
22						
23						
24						
25						
26						
27						
28						
29						

Descrizione delle formule del foglio

Determinare la curva soluzione dell'equazione $y' = \frac{y-x}{y+x}$ con condizione iniziale **y(0)=1** utilizzando il metodo delle tangenti.

1. Slider Δ_x con incremento 0.1 ed intervallo [0.1,1].
2. Opzioni->etichettatura->nessun nuovo oggetto.
3. Vista foglio di calcolo
4. Creare la tabella seguente:

	A	B	C	D	E	F	G
1	delta_x						
2	Δ_x						
3		X	Y	Y'	Punto (x,y)	Retta tangente	
4	Condizione iniziale	0	1	=(C4-B4)/(C4+B4)	P=(B4,C4)	f(x)=D4*(x-B4)+C4	
5		=B4+$A2	F4(B5)	↓	↓	↓	Segmento[E4,E5]
		↓	↓	↓	↓	↓	↓

Istruzione A2	Riporto il valore dello slider; servirà per incrementare il passo
Istruzione B4 e C4	Condizione iniziale
Ist. D4	Poiché nella equazione differenziale si ha $y' = \frac{y-x}{y+x}$ in questa colonna calcolo il valore $(C4 - B4)/(C4 + B4)$
Ist. E4	Creo il punto P(B4,C4) nel piano cartesiano la condizione iniziale
Ist. F4	Definisco la retta con coefficiente angolare y'(B4) passante per (B4,C4). **NB:** Geogebra attribuisce a questa retta (funzione) il nome F4(x) cioè il riferimento di cella nella quale è stata definita
Istr. B5	Calcolo la coordinata x del successivo punto che approssima la soluzione dell'equazione differenziale.
Istr.C5	La coordinata y del nuovo punto deve appartenere alla retta creata con l'istruzione F4
Istr. G5	Definisco il segmento che approssima la curva
Istr.D5,E5,F5	Copia in basso (iteriamo i passi)

NOTA:
È possibile selezionare le celle della colonna F che contengono le rette per nasconderle. In questo modo vengono visualizzati i soli segmenti che approssimano la curva.

Rette nel piano cartesiano

Sandra Maria Gabrielli, Liceo "B. Russell" - Cles

Scheda riassuntiva

Docente
Gabrielli Sandra Maria

Classe coinvolta
Classe seconda 2LB del Liceo Linguistico

Numero di alunni
19 alunni

Periodo dell'anno
27 febbraio 2012 – 16 aprile2012

Argomenti trattati
Rette nel piano cartesiano:

- rappresentazione grafica di una retta nel piano cartesiano
- equazione di una retta (forma implicita ed esplicita, parallela ad uno degli assi, passante per l'origine ed in posizione generica)
- coefficiente angolare di una retta passante per l'origine ed in posizione generica
- retta passante per due punti
- parallelismo e perpendicolarità fra rette nel piano cartesiano
- fasci propri ed impropri

Obiettivi di apprendimento
- interpretare le soluzione di una equazione in due variabili come un determinato insieme di punti nel piano cartesiano
- rappresentare per punti il grafico di una retta
- scrivere l'equazione di una retta dato il suo grafico
- scrivere l'equazione di una retta noto il coefficiente angolare e un suo punto
- scrivere l'equazione di una retta passante per due punti usando equazioni di fasci propri o impropri
- riconoscere rette fra loro parallele o perpendicolari
- scrivere l'equazione di una retta parallela o perpendicolare ad una retta data
- scrivere l'equazione di una retta appartenente ad un fascio proprio, nota una condizione
- usare Geogebra per una migliore acquisizione dei concetti sulla retta (per verificare i risultati ottenuti, per comprendere meglio le formule risolutive, per determinare l'equazione di una retta date alcune condizioni, algebriche o grafiche)

Modalità di lavoro
Le prime lezioni si sono svolte in classe mediante l'uso della lavagna interattiva e di Geogebra. Quanto mostrato veniva formalizzato. I ragazzi, contestualmente, per un'ora alla settimana, si esercitavano in aula informatica a verificare quanto detto o a risolvere individualmente semplici esercizi proposti dall'insegnante. Successivamente le lezioni sono state miste (di tipo tradizionale o con l'ausilio del software) e Geogebra è stato un mezzo per aiutare i ragazzi a comprendere più facilmente concetti difficili. Gli esercizi proposti in classe, tratti dal loro libro di testo Bergamini, Trifone, Barozzi – "Moduli di matematica, La retta e i sistemi lineari, mod. E" – Zanichelli, sono stati risolti prevalentemente al posto e in gruppo.

Modalità di registrazione del lavoro da parte degli studenti
Gli studenti prendevano nota sul loro quaderno dei concetti che di volta in volta venivano dati dall'insegnante con o senza Geogebra, delle formule, dei grafici e degli esempi significativi. Svolgevano sul

quaderno gli esercizi proposti in classe o dati come compito a casa. Durante l'ora di informatica l'insegnante proponeva esercizi preparati in precedenza su file (prevalentemente sulla lettura di grafici) o tratti dal loro libro (esercizi generici). Li svolgevano algebricamente e poi verificavano con Geogebra. Solo l'attività sui fasci propri proposta con Geogebra è stata registrata su file dagli studenti, che hanno seguito passo passo le indicazioni del docente.

Numero unità orarie impiegate e loro consistenza

23 ore da 50 minuti

Tipologia di verifica

Verifica scritta in classe della durata di 50 minuti.

Esiti della verifica

- Buono 37%
- Discreto 10%
- Sufficiente 37%
- Insufficiente 16%

Valutazione dell'attività

L'attività proposta è stata proficua sia dal punto di vista dell'apprendimento (solo 3 studenti insufficienti su 19), che del coinvolgimento. Tutti hanno lavorato ed apprezzato l'uso di geogebra che ha aiutato non poco nell'acquisizione di concetti ritenuti a volte difficili.

Allegati

- descrizione del percorso(vedi sotto)
- eventuali schede di lavoro proposte agli studenti
- esempi di file (ggb, derive, ….altro software) utilizzati dal docente
- esempi di file prodotti dagli studenti
- verifica

Descrizione dell'attività

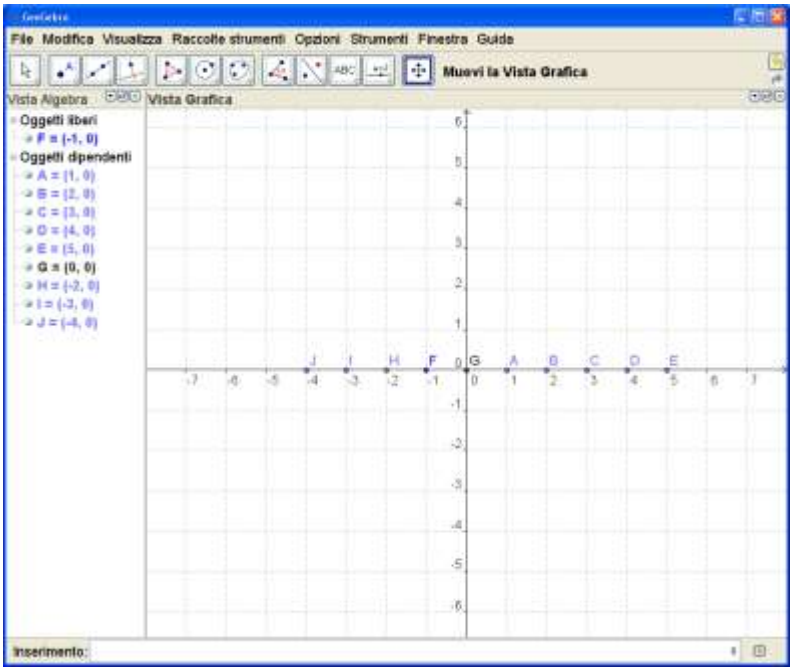
Rette nel piano cartesiano

Ogni retta nel piano cartesiano è rappresentata da una equazione. Essa esprime le caratteristiche che ciascun punto appartenente a quella retta ha.

Le prime rette che si incontrano nel piano cartesiano sono gli assi.

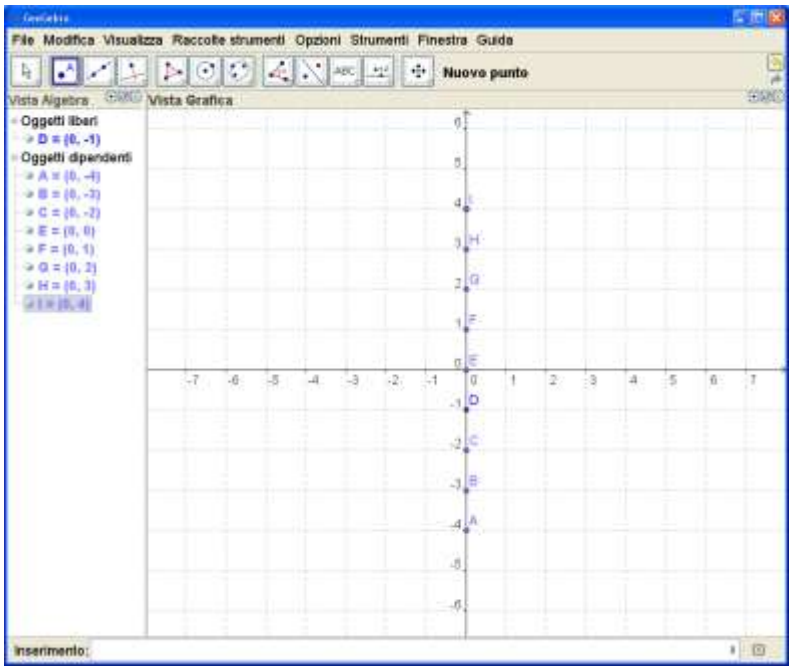
Consideriamo **l'asse x.**

Vogliamo vedere quale equazione la rappresenta. Per fare questo, con l'utilizzo di geogebra, visualizzati sia gli assi che la griglia, si disegnano dei punti appartenenti all'asse x. Nella finestra algebra compaiono le coordinate dei punti disegnati. Si fa notare ciò che hanno in comune: la stessa ordinata 0. Dunque si può scrivere $y = 0$. Essa è l'equazione dell'asse x.



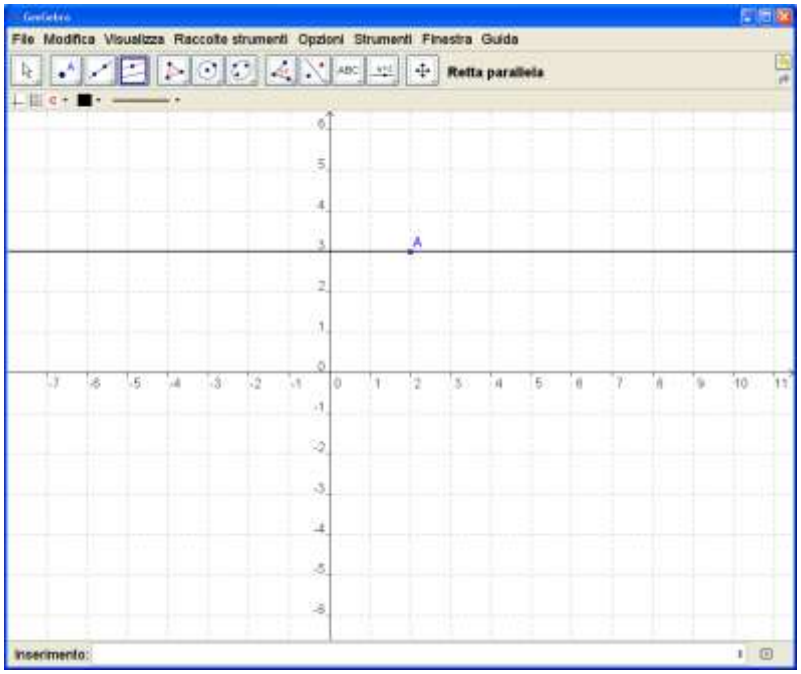
Consideriamo **l'asse y.**

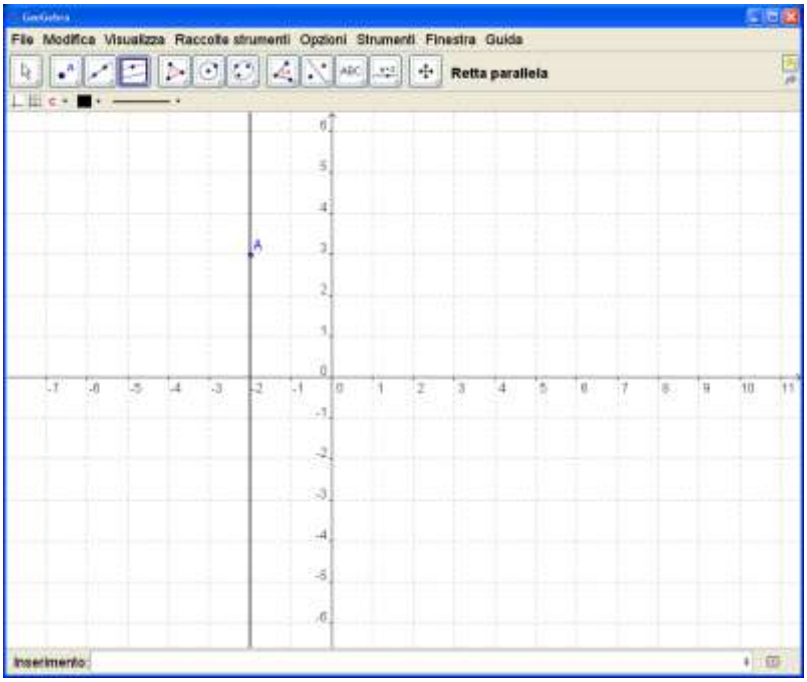
Si disegnano dei punti appartenenti ad esso. Si fa notare ciò che hanno in comune: la stessa ascissa 0. Dunque si può scrivere $x = 0$. Essa è l'equazione dell'asse y.



Tolta la finestra algebra, si traccia la retta $y = 3$ con la funzione "punto P(2; 3)" e "retta parallela " ad asse x. Si disegnano alcuni punti su tale retta e si chiede cosa hanno in comune: la stessa ordinata 3.

Si traccia la retta $x = -2$. Si disegnano alcuni punti su tale retta e si chiede cosa hanno in comune: la stessa ascissa -2.

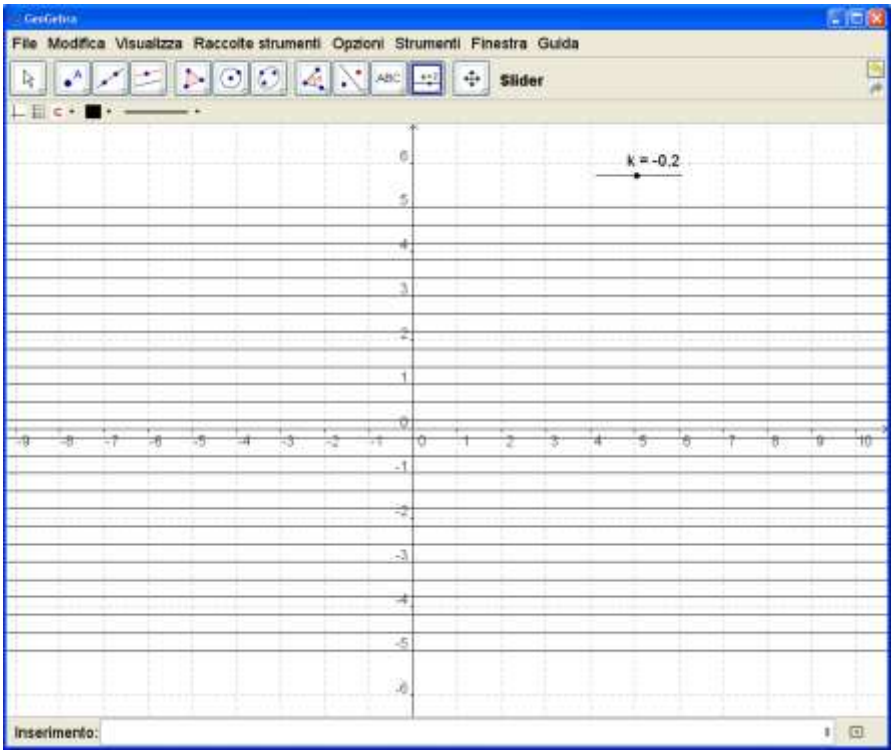




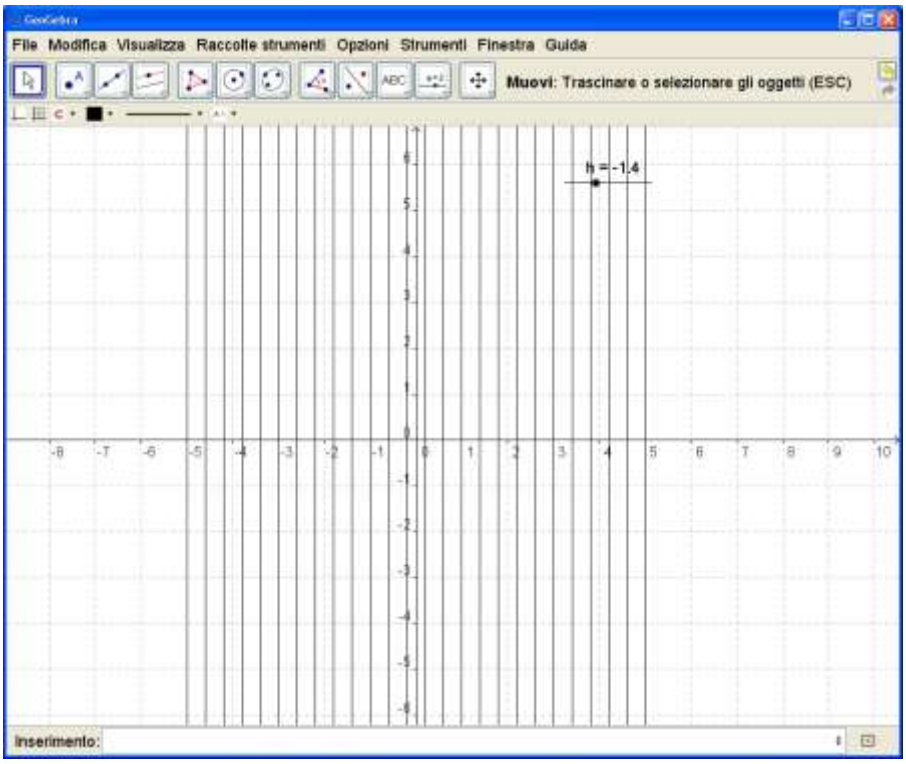
Da questi esempi si possono allora ricavare le equazioni generali delle rette parallele agli assi cartesiani: $y = k$ (rette parallele all'asse x) e $x = h$ (rette parallele all'asse y).

Per ottenere una visualizzazione efficace utilizziamo degli slider.

Ad esempio si definisce uno slider di nome k con incremento 0,4 poi si inserisce l'equazione $y = k$ nella barra di inserimento. Compare una retta che ha $k = 1$. Si seleziona la retta e col tasto destro si sceglie la voce "animazione attiva", si clicca sullo slider e si seleziona "traccia attiva": vengono tracciate le rette parallele all'asse x, per k compreso tra -5 e 5 con incremento 0,4.



La stessa cosa si fa per le rette parallele all'asse y: si seleziona uno slider di nome h ed incremento 0,2 poi si inserisce l'equazione $x = h$ nella barra di inserimento. Con "animazione attiva" e "traccia attiva", vengono tracciate le rette parallele all'asse y, per k compreso tra -5 e 5.



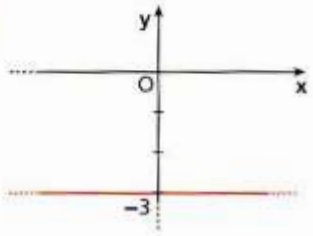
Fatto questo si assegnano esercizi nei quali gli studenti devono determinare l'equazione della retta parallela ad uno degli assi disegnata nel piano o disegnare la retta di data equazione (del tipo $y = k$ o $x = h$).

Esempi di esercizi tratti dal libro di testo[25]

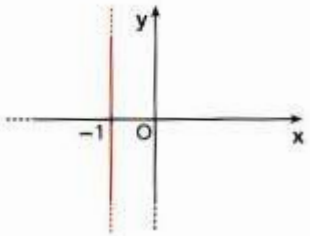
Come esemplificazione del tipo di esercizio, tratto dal libro di testo, che il docente utilizza in questo percorso.

Per ogni grafico scrivi l'equazione della retta corrispondente.

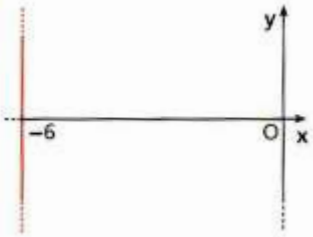
78



79



80



Disegna le rette che hanno le seguenti equazioni.

81 $x = -2$; $y = -2$; $x = 3$; $y = \frac{3}{2}$; $x = 1$.

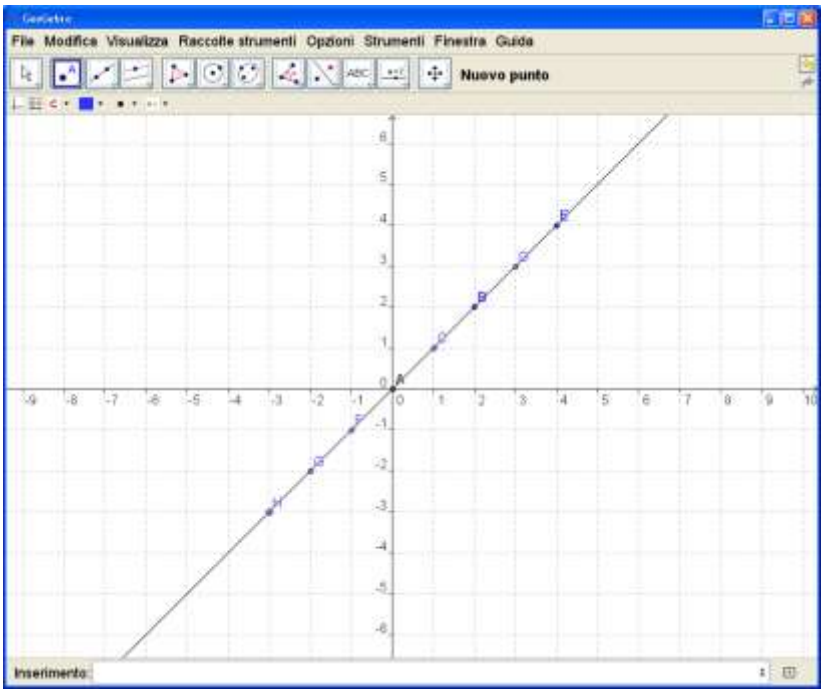
82 $2x - 6 = 0$; $-3y = 0$; $3 - y = 0$; $5 - 10x = 0$; $2x = -8$.

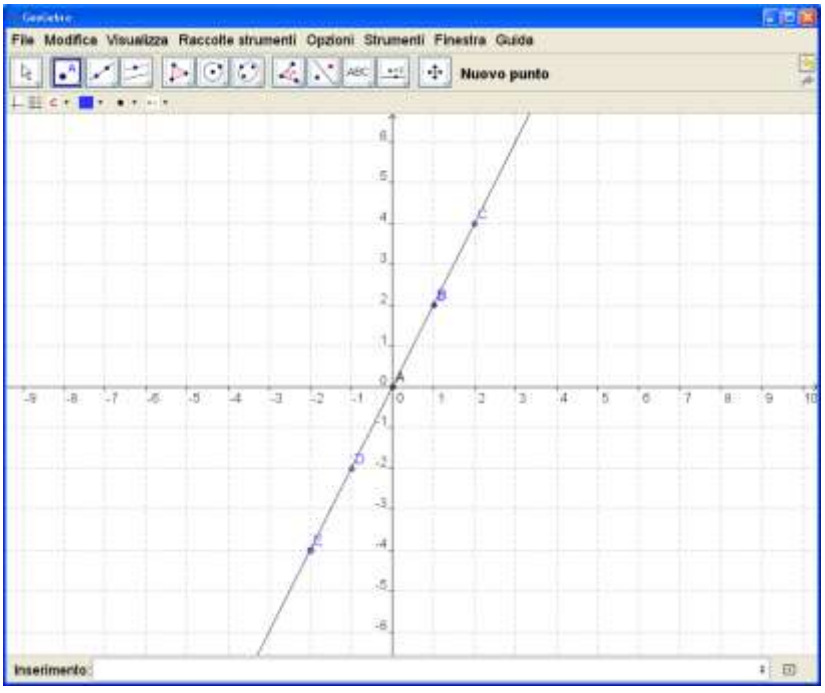
[25] Bergamini, Trifone, Barozzi – "Moduli di matematica, La retta e i sistemi lineari, mod. E" – Zanichelli.

Rette passanti per l'origine degli assi cartesiani

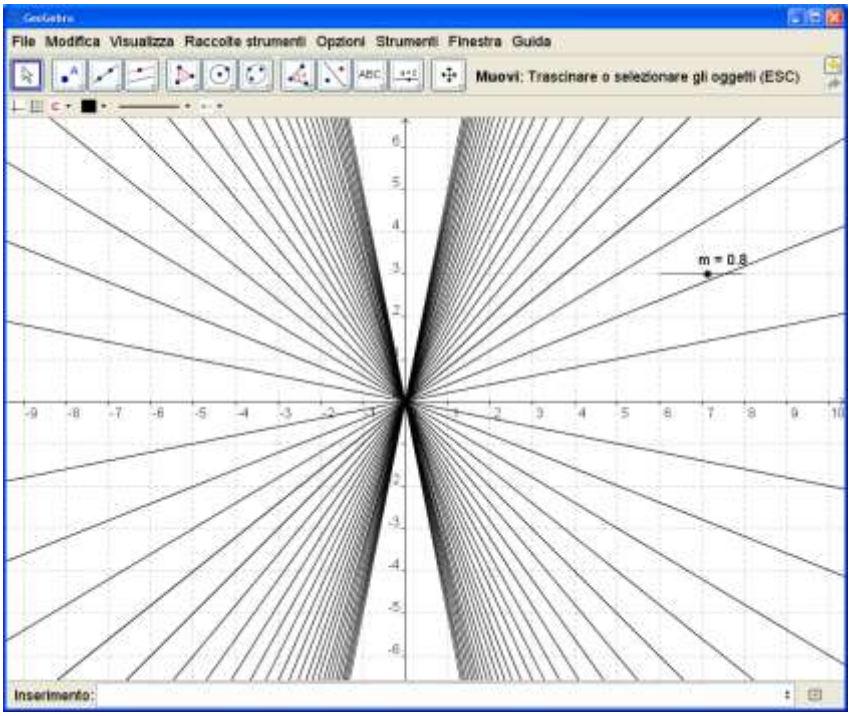
Si disegna la bisettrice del 1° - 3° Quadrante. Rappresentati dei punti sulla retta, si chiede quali caratteristiche hanno. Si nota che le ascisse sono uguali alle ordinate. Allora l'equazione sarà $y = x$.

Si fa la stessa cosa con la bisettrice del 2° - 4° Quadrante la cui equazione sarà $y = -x$ e con la retta che passa per l'origine degli assi e per il punto P(3,6). Si nota che le ordinate sono il doppio delle ascisse per cui l'equazione sarà $y = 2x$.



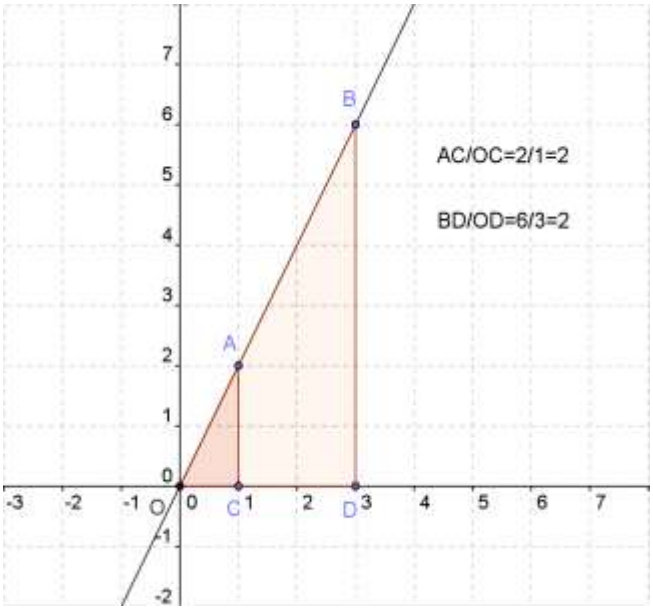


Dunque le rette passanti per l'origine hanno equazione $y = mx$ dove *m* viene detto "coefficiente angolare" ed indica la "pendenza" della retta. Per verificare l'equazione con geogebra, si usa uno slider *m* ed incremento 0,2 poi si inserisce l'equazione $y = mx$ nella barra di inserimento. Con "animazione attiva" e "traccia attiva", vengono tracciate le rette passanti per l'origine, con m compreso tra -5 e 5.



Come si trova il valore di *m*?

Algebricamente, dall'equazione $y = mx$, si ricava $m = \frac{y}{x}$ applicando il secondo principio di equivalenza. Dunque *m* si ottiene mediante il rapporto tra ordinata ed ascissa di un qualunque punto $P(x, y)$ appartenente alla retta data. **Geometricamente**, osservando il grafico della retta di equazione $y = 2x$, si nota come *m* si ottiene tramite il rapporto tra il cateto verticale e quello orizzontale di un qualunque triangolo rettangolo ottenuto a partire da un punto che appartiene alla retta ed ha, per comodità, coordinate intere. Ad esempio i punti $A(1,2)$ e $B(3,6)$. Uno dei vertici è sempre l'origine degli assi cartesiani.



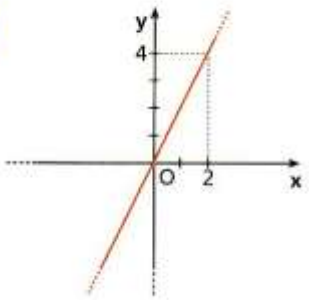
Fatto questo si assegnano esercizi nei quali gli studenti devono determinare l'equazione della retta passante per l'origine disegnata nel piano o passante per l'origine e per un dato punto.

Esempi di esercizi tratti dal libro di testo

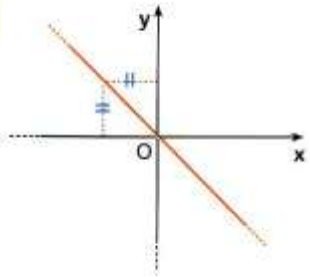
Come esemplificazione del tipo di esercizio, tratto dal libro di testo, che il docente utilizza in questo percorso.

Dalle indicazioni date in ogni figura, ricava l'equazione della retta disegnata.

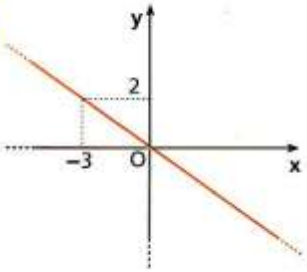
74



75



76



Scrivi l'equazione della retta, passante per l'origine e per il punto A. Verifica se il punto B appartiene alla retta trovata.

53 $A\left(\frac{1}{2};1\right)$, $B(-1;-2)$.

54 $A(1;-1)$, $B\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

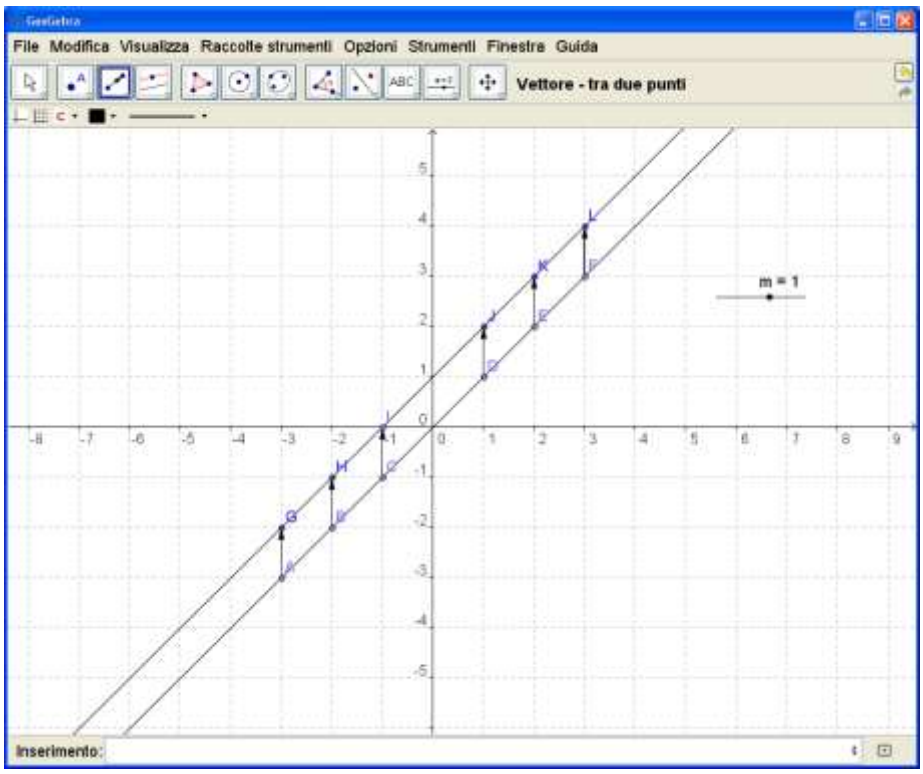
55 $A(-2;0)$, $B(-2;10)$.

56 $A(3;2)$, $B(6;4)$.

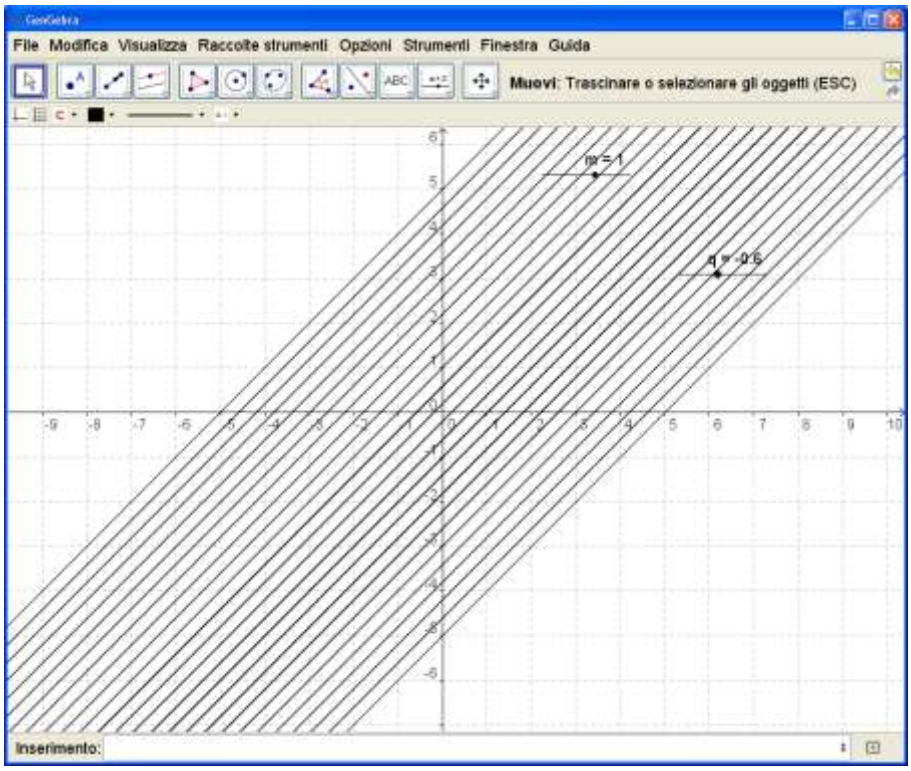
Rette in posizione generica

A partire dall'equazione $y = x$ di cui si disegna la retta, si effettua una traslazione dei suoi punti verso l'alto di una unità. Cosa succede? Che retta si ottiene? Quale sarà la sua equazione? $y = x + 1$

Si fanno altri esempi traslando i punti verso l'alto o verso il basso di 2 o 3 unità e si fa notare che questi numeri coincidono con l'ordinata del punto di intersezione con l'asse y. Dunque le rette in posizione generica hanno equazione $y = mx + q$.

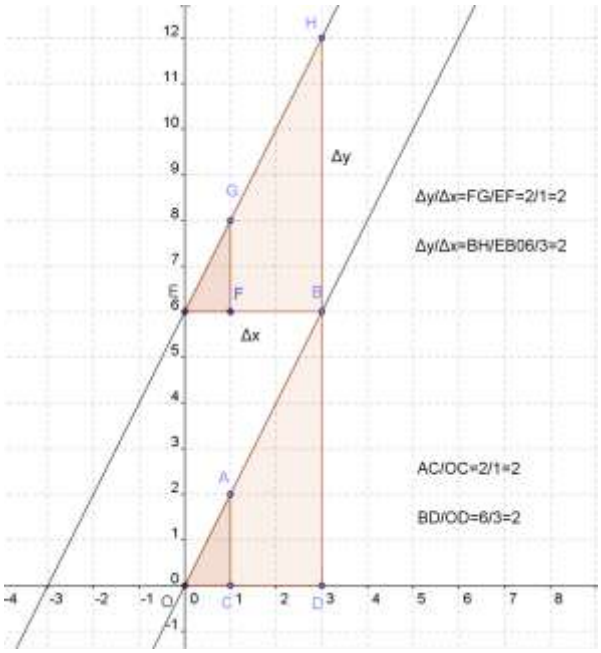


Per verificarlo con Geogebra, si usano due slider, uno di nome m ed incremento 0,2 e l'altro di nome q ed incremento 0,2, poi si inserisce l'equazione $y = mx + q$ nella finestra inserimento. Viene disegnata una retta con $m = 1$ e $q = 1$. Con "animazione attiva" e "traccia attiva" applicato a q, vengono tracciate le rette parallele fra loro e alla retta disegnata, con q compreso tra -5 e 5.



Come si trova il valore di *m*?

Geometricamente, non cambia nulla. Traslando una retta verso l'alto o verso il basso, si traslano anche i triangoli che permettono di individuare *m*. Osservando il grafico della retta di equazione $y = 2x + 6$, si nota come *m* si trova sempre tramite il rapporto tra il cateto verticale e quello orizzontale di un qualunque triangolo rettangolo ottenuto a partire da due punti che appartengono alla retta ed hanno, per comodità, coordinate intere.



Algebricamente, ciò significa che $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ dove Δy è uguale alla differenza tra ordinate e Δx è uguale alla differenza tra ascisse dei due punti scelti.

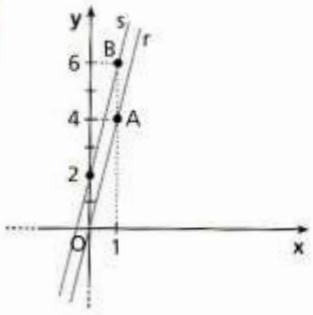
Fatto questo si assegnano esercizi nei quali gli studenti devono determinare l'equazione della retta generica disegnata nel piano (perché ottenuta mediante traslazione di una retta passante per l'origine) o passante per due punti assegnati.

Esempi di esercizi tratti dal libro di testo

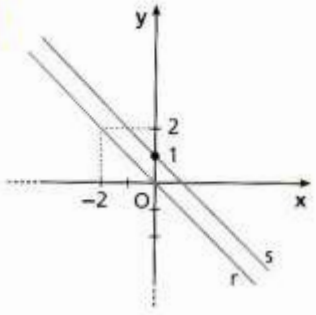
Come esemplificazione del tipo di esercizio, tratto dal libro di testo, che il docente utilizza in questo percorso.

Dalle informazioni fornite da ogni grafico ricava l'equazione della retta *r* e l'equazione della retta *s*.

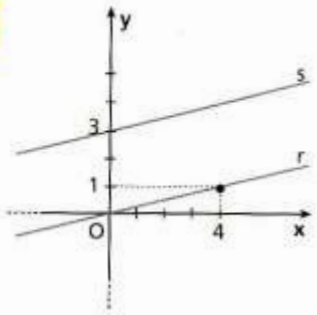
84



85



86



Determina, quando possibile, il coefficiente angolare della retta passante per ogni coppia di punti indicata. Successivamente individua l'equazione della retta.

132 $A(1;2)$, $B(4;5)$.

133 $A(2;4)$, $B(-4;4)$.

134 $C(5;-3)$, $D(7;-2)$.

135 $A\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{2}\right)$.

136 $E(0;2)$, $F(0;-2)$.

137 $A(4;0)$, $B(-2;4)$.

Scrivi l'equazione della retta passante per le seguenti coppie di punti.

211 $A(0;3)$, $B(8;0)$.

212 $A(-5;0)$, $B(0;-2)$.

213 $A(-2;5)$, $B(-2;-3)$.

214 $A(7;0)$, $B(6;-4)$.

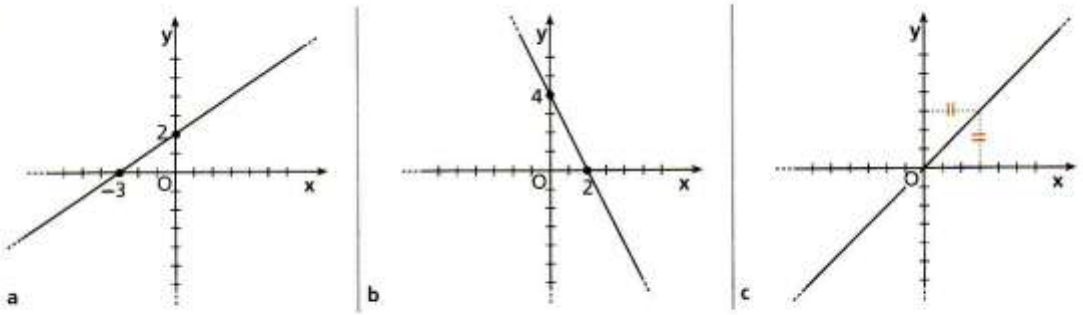
215 $A(0;0)$, $B(1;1)$.

216 $A\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$, $B\left(5;\frac{3}{4}\right)$.

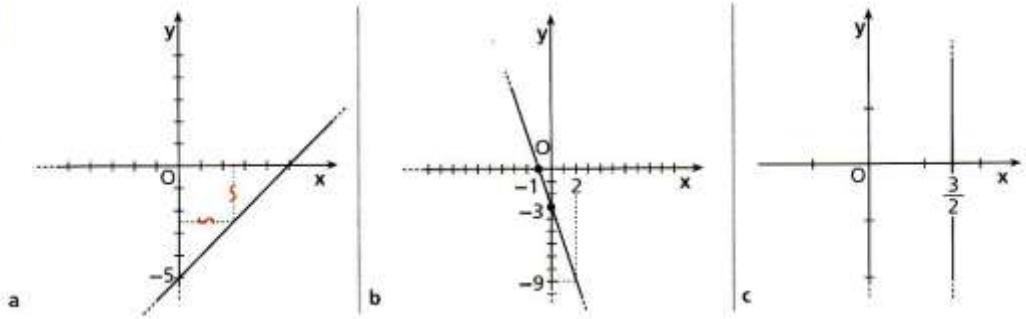
Si assegnano infine ulteriori esercizi di rinforzo sulla determinazione di rette dato il grafico:

In ogni esercizio scrivi l'equazione della retta utilizzando le informazioni fornite dal grafico.

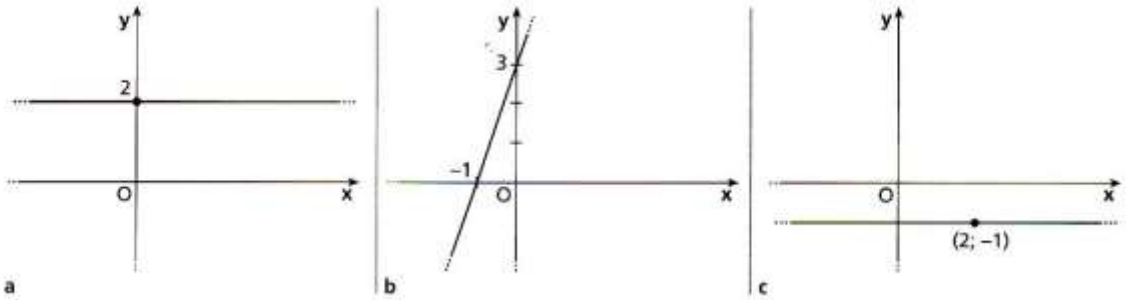
145



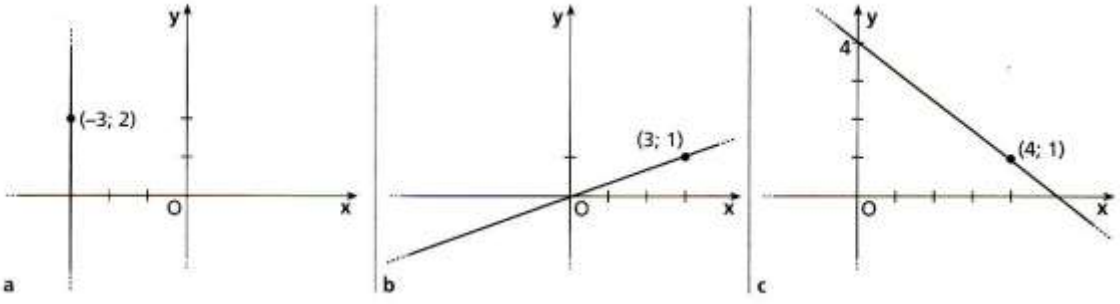
146



147

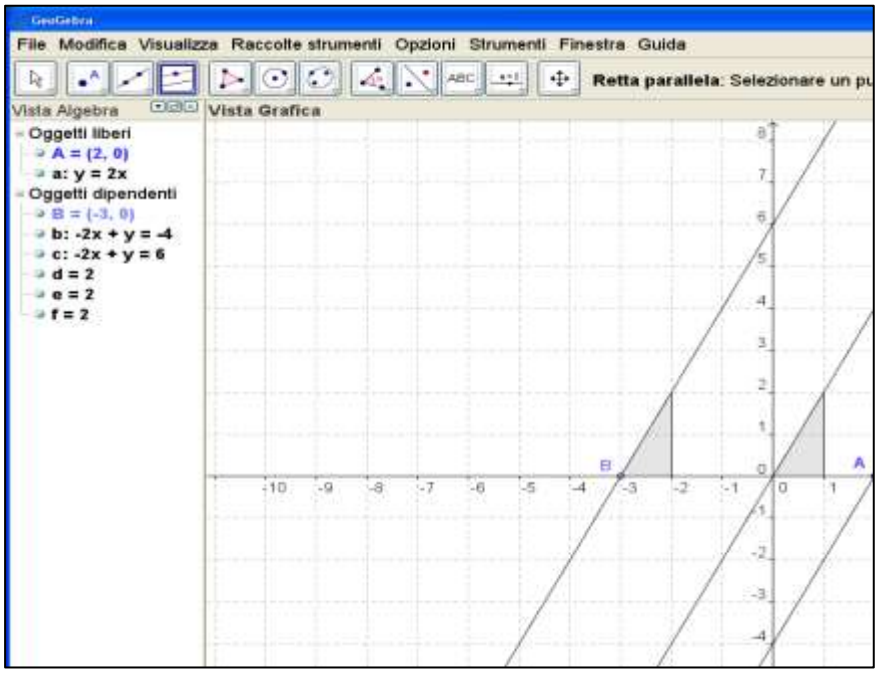


148



Rette parallele

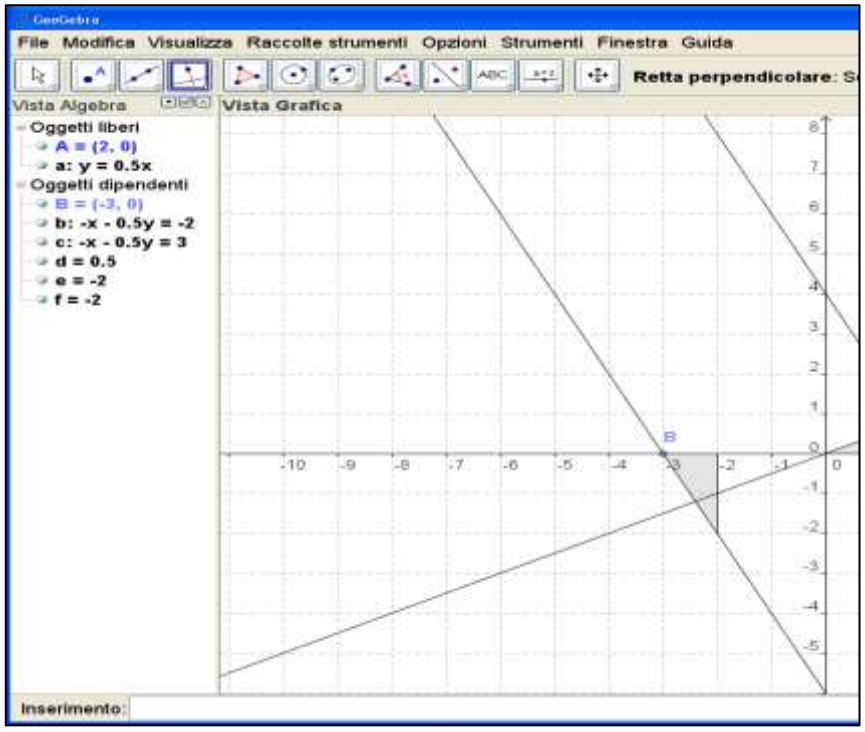
Anche se abbiamo già trovato in un'attività precedente che due rette sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare, verifichiamolo con Geogebra. ($m = m'$)



Disegniamo con Geogebra la retta *a* di equazione $y = 2x$ e due punti $A(2,0)$ e $B(-3,0)$.

Successivamente, con il comando "retta parallela" tracciamo due rette parallele ad *a,* ciascuna delle quali passa per uno dei due punti dati. Nella finestra algebra compaiono le equazioni delle due rette *b* e *c*. Scrivendo nella barra di inserimento il comando "pendenza[nome retta]" per ciascuna delle tre rette, il computer calcola il coefficiente angolare. Come si può vedere nella finestra algebra, è lo stesso.

Rette perpendicolari



Cerchiamo con Geogebra la relazione esistente tra i coefficienti angolari di due rette perpendicolari. Disegniamo con Geogebra la retta *a* di equazione $y = \frac{1}{2}x$ e due punti $A(2,0)$ e $B(-3,0)$.

Successivamente, con il comando "retta perpendicolare" tracciamo due rette perpendicolari ad *a,* ciascuna delle quali passa per uno dei due punti dati. Nella finestra algebra compaiono le equazioni delle due rette *b* e *c*. Scrivendo nella barra di inserimento il comando "pendenza[nome retta]" per ciascuna delle tre rette, il computer calcola il coefficiente angolare. Come si può vedere nella finestra algebra, le rette *b* e *c* hanno coefficiente angolare uguale all'opposto del reciproco di quello di *a* ($m = -\frac{1}{m'}$).

Fatto questo si assegnano esercizi nei quali gli studenti devono determinare l'equazione della retta parallela e perpendicolare ad una retta data e passante per un punto.

Esempi di esercizi tratti dal libro di testo

Come esemplificazione del tipo di esercizio, tratto dal libro di testo, che il docente utilizza in questo percorso.

Per ciascuna retta, scrivi l'equazione della parallela e della perpendicolare a essa e passanti per il punto A.

194 $y = \frac{1}{3}x$, $A(1; 1)$. $\left[y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}; y = -3x + 4\right]$

195 $y = \frac{7}{6}x$, $A(-3; -3)$. $\left[y = \frac{7}{6}x + \frac{1}{2}; 6x + 7y + 39 = 0\right]$

196 $y = -\frac{8}{9}x$, $A(-1; 5)$. $\left[y = -\frac{8}{9}x + \frac{37}{9}; 9x - 8y + 49 = 0\right]$

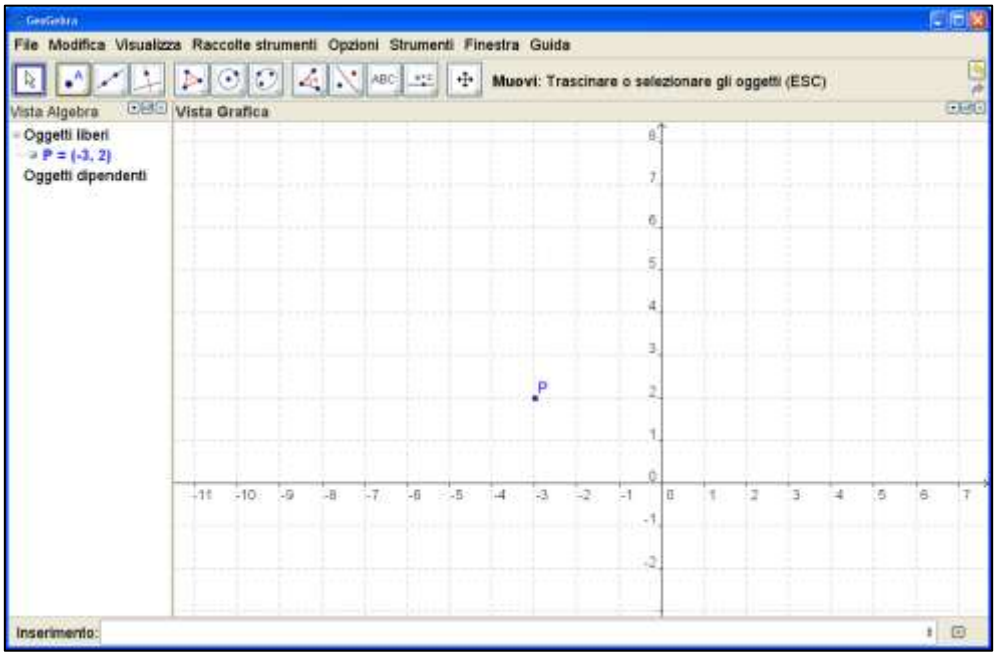
197 $y + 3x + 2 = 0$, $A(0; -2)$. $\left[y = -3x - 2; y = \frac{1}{3}x - 2\right]$

198 $6x - 3y - 2 = 0$, $A(-5; 2)$. $[y = 2x + 12; x + 2y + 1 = 0]$

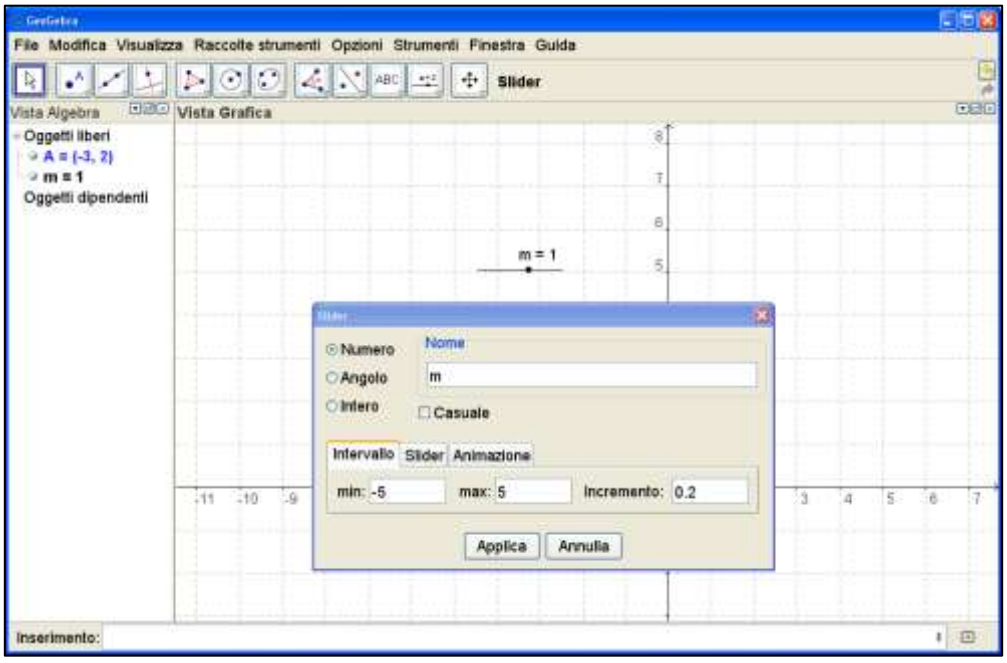
Fascio proprio di rette

- Tra le rette del fascio di centro P(-3,2), si trovi la retta:
  a) di coefficiente angolare m=-2;
  b) passante per il punto A(5,3);
  c) parallela all'asse x;
  d) parallela all'asse y;
  e) parallela alla retta passante per B(-3,5) e C(2,4);
  f) perpendicolare alla retta passante per B(-3,5) e C(2,4).

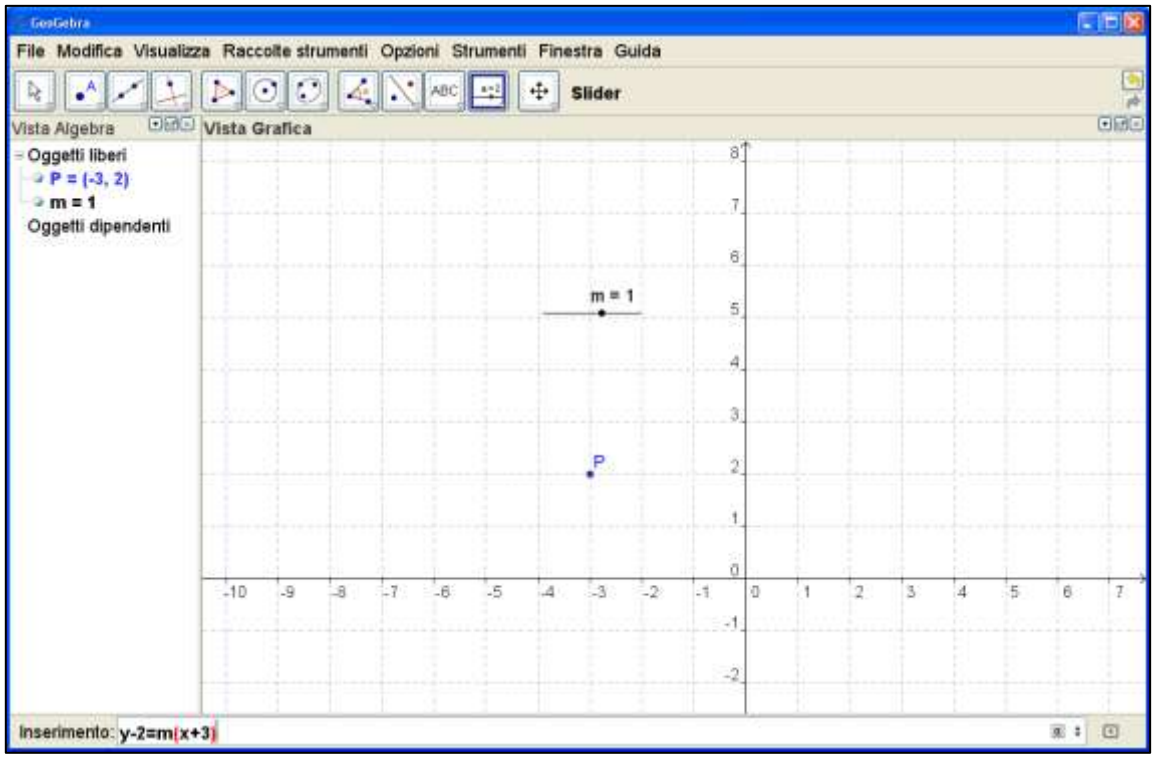
Per risolvere l'esercizio con geogebra, si disegna innanzitutto il centro P del fascio proprio di rette.



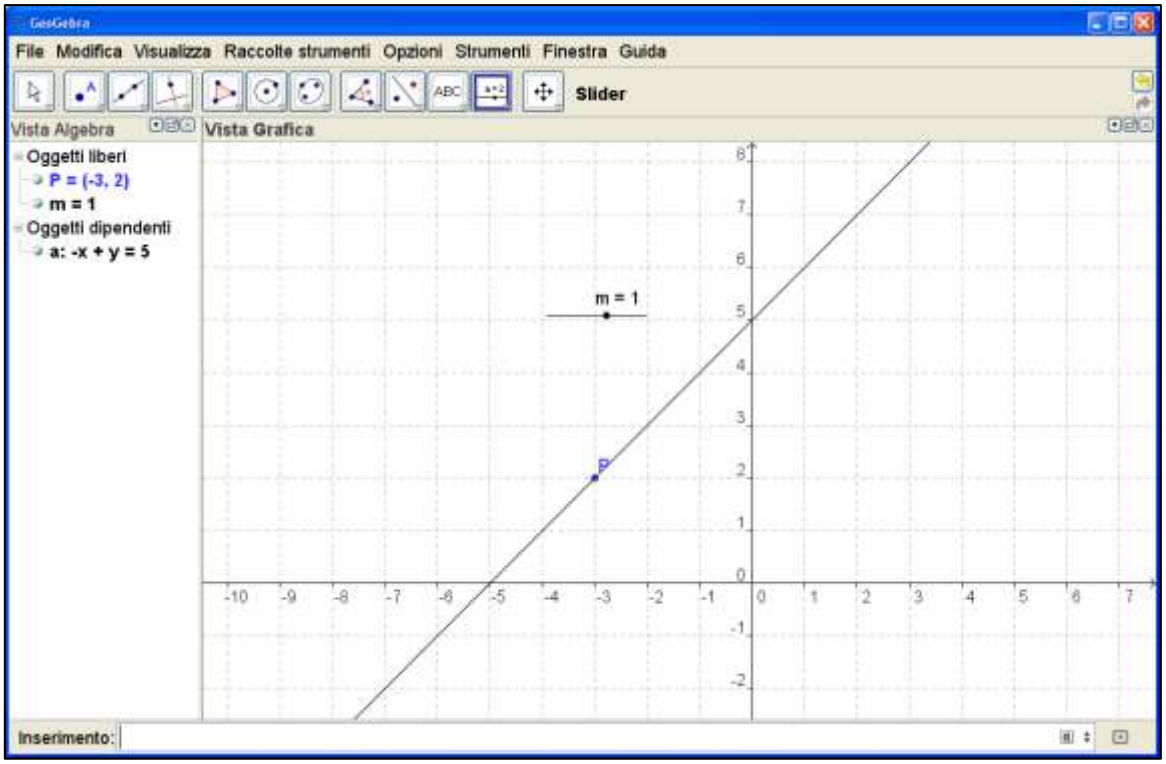
Poi si crea uno slider di nome m (indica il coefficiente angolare) i cui valori, compresi tra -5 e 5, si incrementano di 0.2. In questo modo si possono disegnare le rette del fascio richieste.



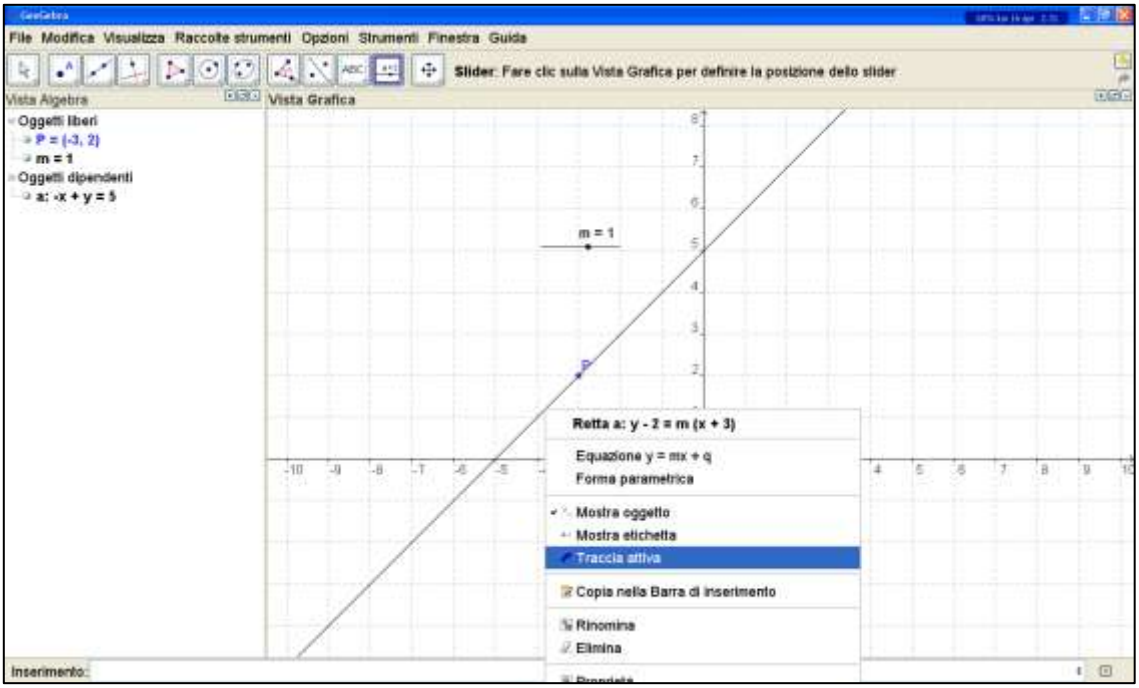
Fatto questo, nella barra di inserimento si scrive l'equazione del fascio $y-2=m(x+3)$, poi si digita invio.



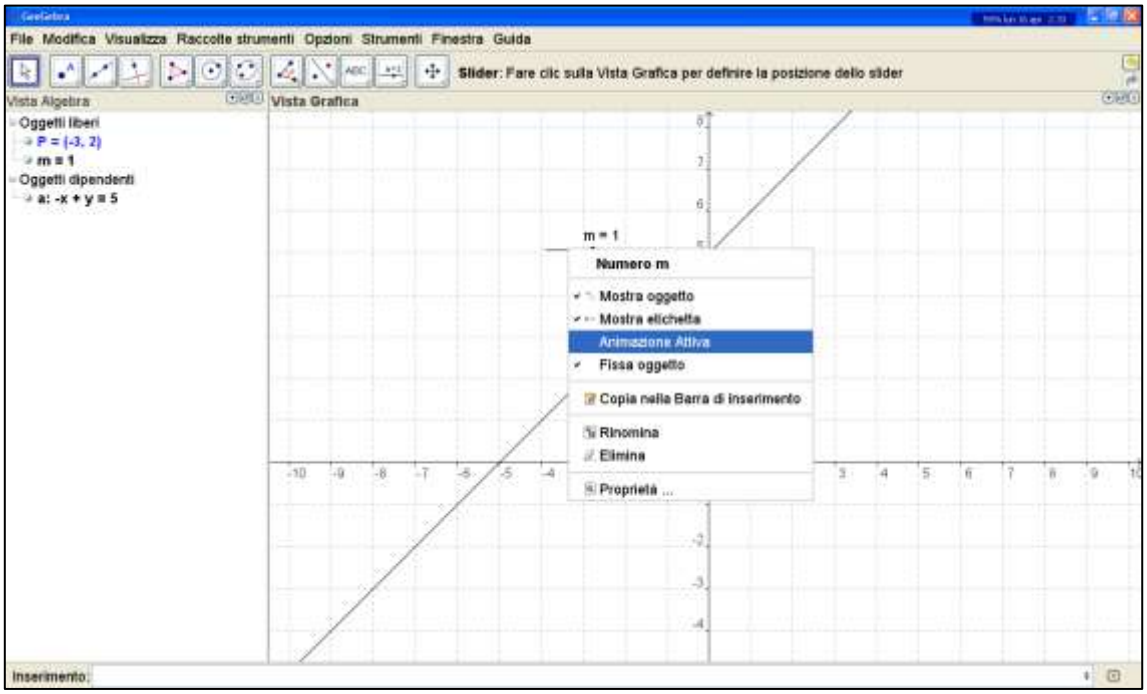
Compare una retta che passa per P ed ha coefficiente angolare uguale ad 1.



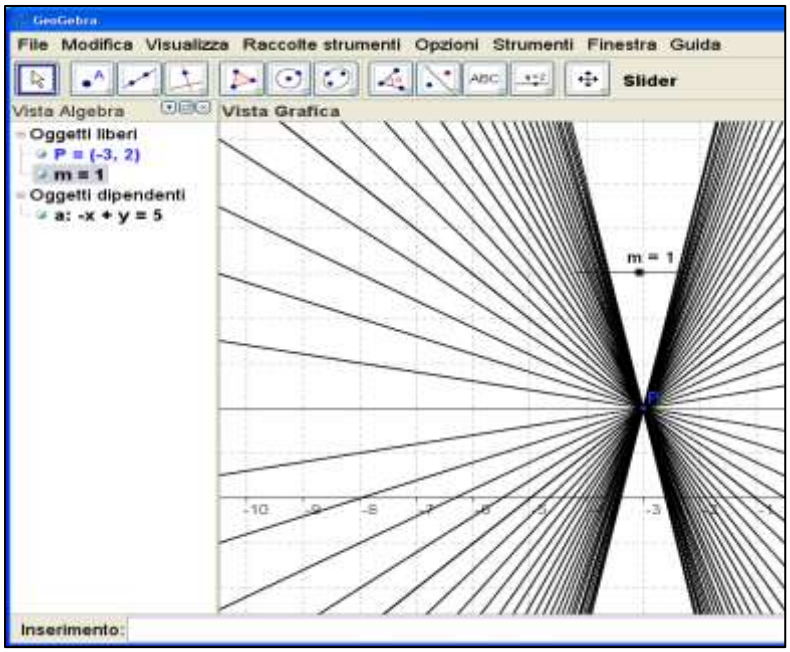
Per verificare che, al variare del valore di m, si ottengono rette appartenenti al fascio, ci si posiziona sulla retta ottenuta tramite slider e, facendo clic col tasto sinistro del mouse, si apre una tendina da cui si seleziona la voce “traccia attiva”.



Poi ci si posiziona sullo slider, si clicca il tasto sinistro del mouse e, dalla tendina aperta, si seleziona “animazione attiva”.



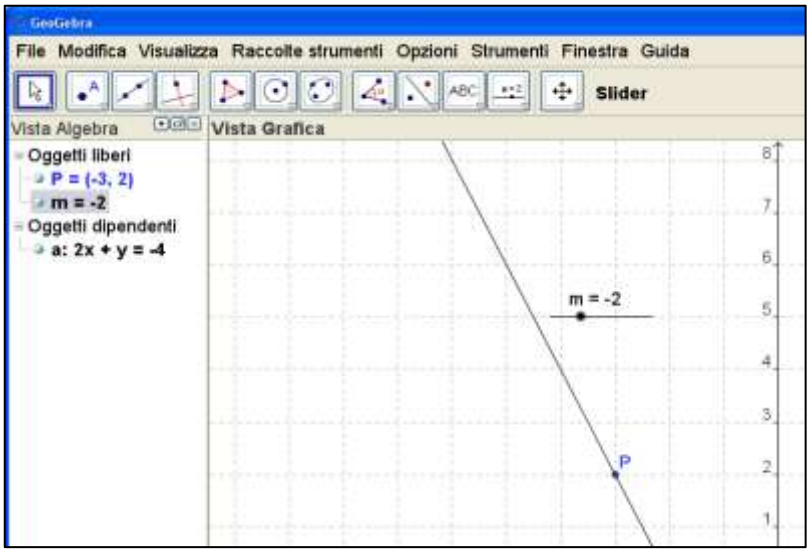
Il cursore dello slider inizia a muoversi facendo variare il valore di m e contemporaneamente vengono tracciate le rette appartenenti al fascio che hanno il valore di m selezionato in quel momento. Rimane traccia di tutte le rette selezionate tramite m. Per fermare il movimento basta andare sullo slider col tasto destro e deselezionare la voce "animazione attiva". Per ritornare ad avere una sola retta del fascio, si può ruotare la rotellina del mouse.



A questo punto si può iniziare a risolvere l'esercizio iniziale.

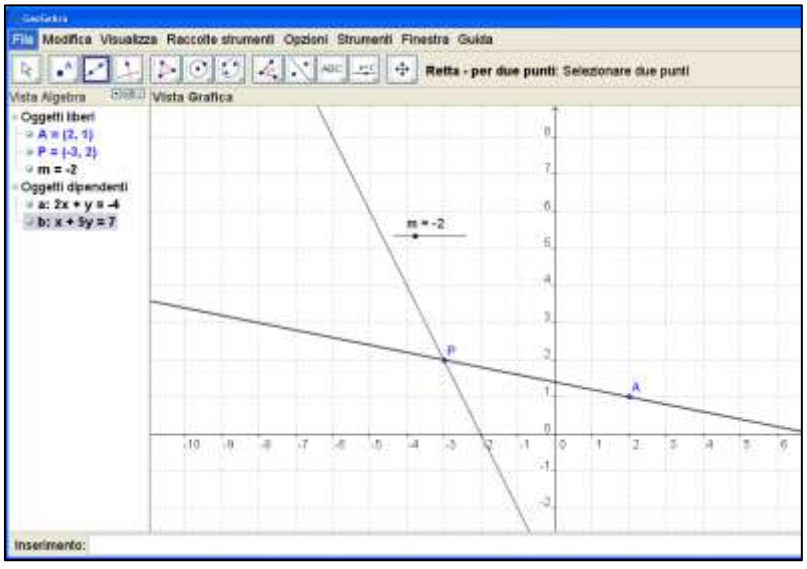
a) Tra le rette del fascio, trova quella di coefficiente angolare m = -2.

Si posiziona il puntatore del mouse sullo slider e col tasto sinistro si fa scorrere il cursore finché non si trova il valore -2.



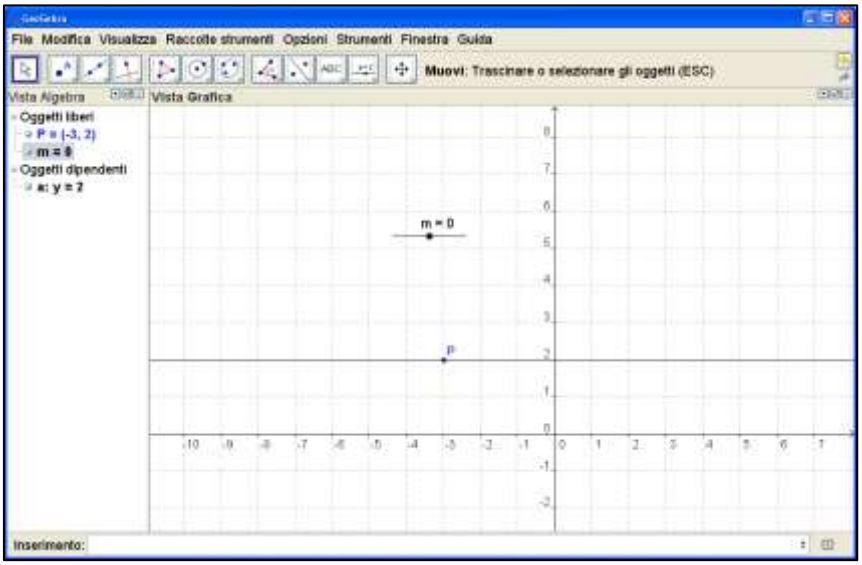
b) Tra le rette del fascio, trova quella che passa per il punto A(2,1).

Poiché per due punti passa una sola retta, si disegna la retta che passa per P ed A con il comando "retta per due punti".
Si potrebbe anche far variare m fino a quando non si trova la retta che passa per A. Questo modo però non sempre funziona poiché, qualunque sia il passo scelto, ci saranno pendenze che non sono multipli del valore assegnato al passo.



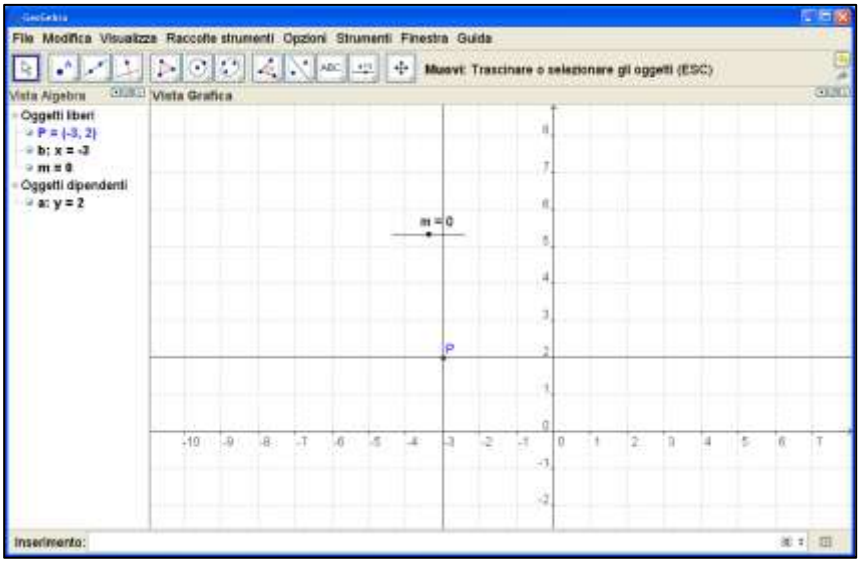
c) Tra le rette del fascio, trova la retta parallela all'asse x.

Sapendo che tale retta ha m = 0, basta far variare il valore di m sullo slider finché si ottiene 0 .



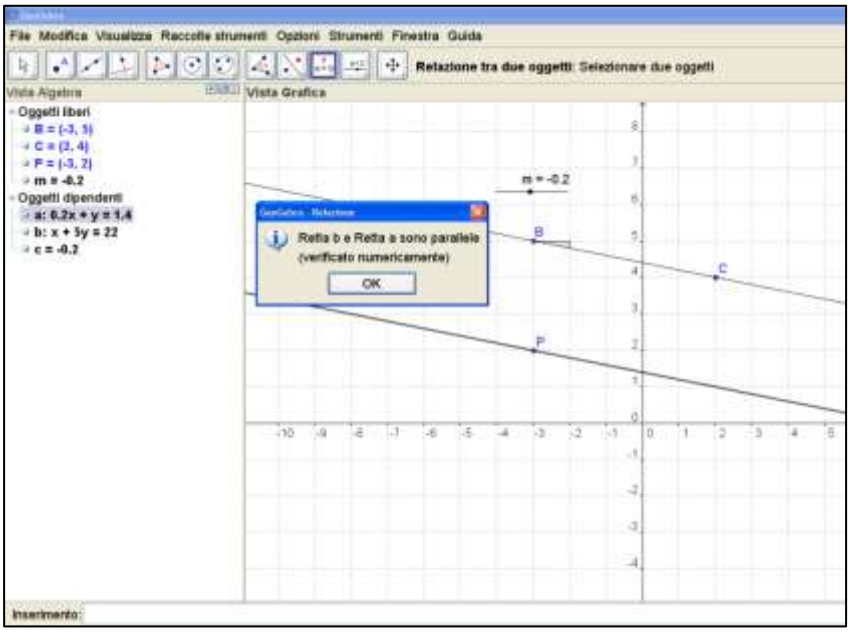
d) Tra le rette del fascio, trova la retta parallela all'asse y.

In questo caso, lo slider non aiuta. Si deve inserire l'equazione x = -3 nella finestra di inserimento e si fa invio.

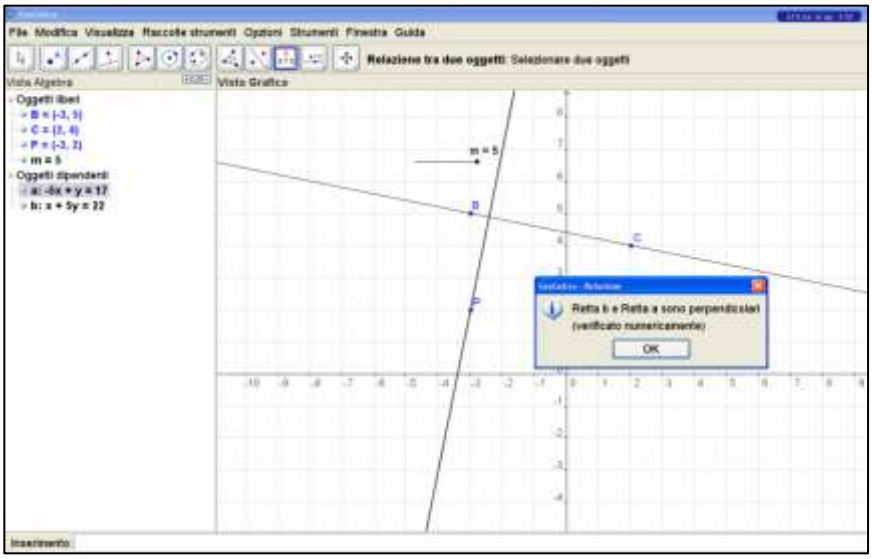


e) Tra le rette del fascio, trova la parallela alla retta passante per B(-3,5) e C(2,4).

Si disegnano i due punti e poi la retta passante per essi. Successivamente si cerca la pendenza della retta disegnata inserendo nella finestra di inserimento il comando "pendenza [nome retta]" e poi facendo invio.
Si trova m = -1/5 (m = -0.2). A questo punto si assegna allo slider tale valore. Si ottiene la retta cercata. Per verificare se le due rette sono parallele, si usa il comando "Relazione tra due oggetti".



f) Tra le rette del fascio, trova la perpendicolare alla retta passante per B(-3,5) e C(2,4).



Sapendo che la retta deve avere coefficiente angolare m = 5 (calcolato algebricamente), si seleziona sullo slider questo valore. Si ottiene la retta cercata. Per verificare che le due rette sono perpendicolari, si utilizza come nel caso precedente il comando “Relazione tra due oggetti”.

Sintesi sull'attività "Rette nel piano cartesiano"

L'attività è stata proposta nella 2LB (liceo linguistico annesso al liceo Russell di Cles) formata da 19 ragazzi. È stata svolta dal 27 febbraio 2012 al 16 aprile 2012 per complessive 23 ore di lezione di 50'. Le lezioni si sono tenute in aula informatica oppure in classe con l'ausilio della lavagna interattiva e di geogebra o della lavagna tradizionale. Geogebra ha supportato la lezione tradizionale. L'attività è stata riportata su due file:

- File 1: RETTE NEL PIANO CARTESIANO (equazioni degli assi, rette parallele agli assi cartesiani, rette passanti per l'origine, rette in posizione generica, rette passanti per due punti, rette parallele e perpendicolari);

- File 2: FASCI DI RETTE (fasci di rette propri con determinazione di una retta appartenente al fascio, date alcune condizioni)

In ognuno di essi è stato riportato il percorso svolto, con riferimento ad alcuni esercizi proposti agli studenti e tratti dal loro libro di testo:
Bergamini, Trifone, Barozzi – "Moduli di matematica, La retta e i sistemi lineari, modulo E" – Zanichelli.
Per le vacanze di Pasqua sono stati assegnati alcuni esercizi di ripasso (vedi ALLEGATO 1)
Qualche giorno dopo il rientro è stato somministrato il tema. (vedi ALLEGATO 2)

Conclusioni

L'attività è stata svolta in modo proficuo. GeoGebra è stato molto utile perché ha aiutato a comprendere concetti difficili da capire, se trattati solo algebricamente. Tutti gli studenti hanno lavorato e si sono impegnati. La verifica finale ha dato buoni risultati: solo tre insufficienze piene. Ci sono stati anche due 10 e un 10-. Per i dettagli si veda la tabella posta alla fine di questo documento.
L'anno prossimo penso di riproporre l'attività in modo analogo ridimensionando il lavoro sui fasci propri. Questo permetterà di approfondire qualche altro argomento. La verifica potrà essere strutturata in modo diverso prevedendo una ulteriore prova da svolgere in aula informatica.

ALLEGATO 1 ***3/4/2012***

COMPITI PER LE VACANZE CLASSE 2LB

- Determina l'equazione della retta passante per le seguenti coppie di punti:

1) $A(-3;5);\ B(-7;3)$ 2) $A(2;8);\ B(5;4)$ 3) $A(-1;-3);\ B(5;-1)$ 4) $A(-7;6);\ B(-4;12)$

1) $C(4;7);\ D(9;7)$ 2) $C(2;1);\ D(2;-5)$ 3) $C(-3;-2);\ D(9;-2)$ 4) $C(-8;1);\ D(-8;4)$

- Per ciascuna retta, scrivi l'equazione della parallela e della perpendicolare ad essa, passanti per il punto A.

1) $y=\frac{2}{3}x+1$ $A(-1;1)$ 2) $y=4x-3$ $A(3;-2)$ 3) $y=-\frac{1}{3}x+2$ $A(6;-4)$

4) $y=-\frac{7}{2}x$ $A(4;-12)$ 5) $y=-3x+2$ $A(-3;1)$ 6) $y=-x+5$ $A(-2;2)$

- Tra le rette del fascio di centro P(-2; 0) trova la retta:

a) con $m=2$
b) passante per il punto A(1; -2)
c) parallela all'asse *y*
d) parallela all'asse *x*
e) parallela alla retta di equazione $y=-4x+1$
f) perpendicolare alla retta di equazione $y=2x$
g) parallela alla retta che passa per i punti B(1; 5) e C(3; 4)
h) perpendicolare alla retta che passa per i punti B(1; 5) e C(3; 4)
i) parallela alla bisettrice del 2° e 4° quadrante
j) parallela alla bisettrice del 1° e 3° quadrante

- Svolgi lo stesso esercizio di prima, sapendo però che il centro del fascio è:

1) P(0; 5) 2) P(-3; 6) (cambia il centro ma le richieste sono le stesse)

- Stabilisci se i seguenti punti appartengono o no alla retta indicata:

1) $y=2x+5$ A(-4; -3), B(2; 8), C(–1/2; 4)

2) $y=1/3x+7/3$ A(-6; 1/3), B(-4; 1), C(2; 2)

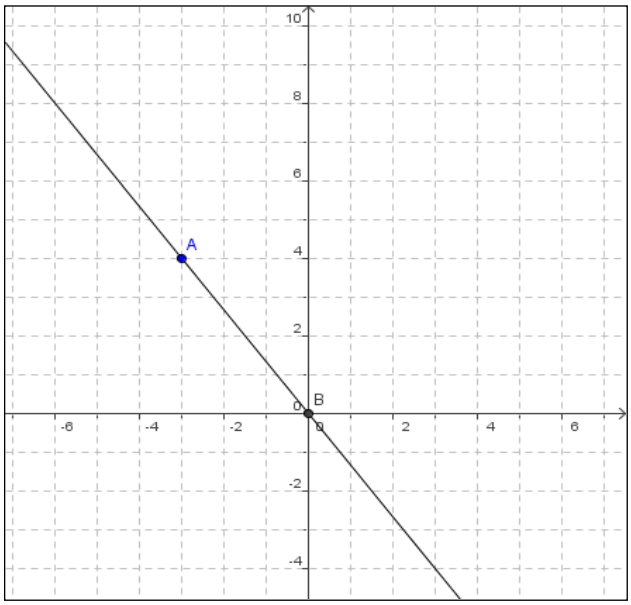
ALLEGATO 2

Liceo B. Russell VIA IV NOVEMBRE 35, 38023 CLES	Indirizzo: Liceo Linguistico		CLASSE
	TEMA DI MATEMATICA	14 aprile '12	2 LB

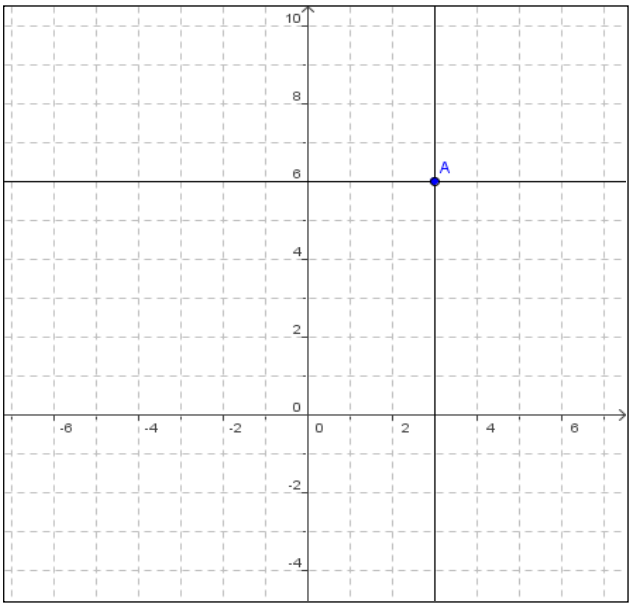
1) Scrivi l'equazione della retta passante per l'origine e per il punto A(–3; 12). Successivamente verifica se i punti B(1/2; 2) e C(–1/4; 1) appartengono alla retta trovata.

2) Dalle informazioni fornite da ogni grafico, ricava l'equazione delle rette disegnate:

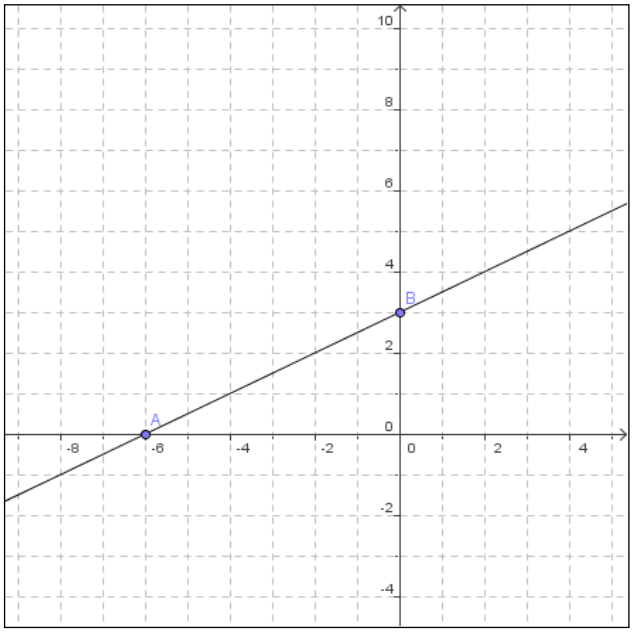
a)



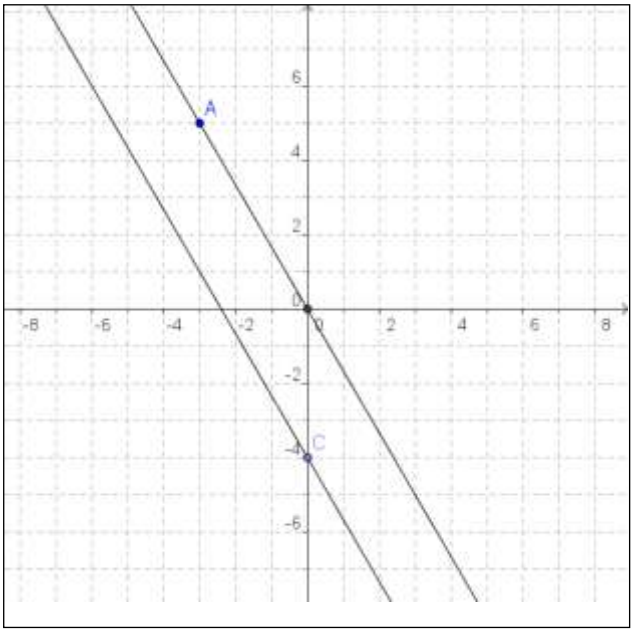
b)



c)



d)



3) Scrivi l'equazione della retta passante per le seguenti coppie di punti:

a) A(–3; 2) B(1; – 6) b) C(– 8; – 2) D(7; – 2) c) E(4; 6) F(4; – 8)

_____

4) Determina l'equazione della parallela e della perpendicolare alla retta r di equazione $y = -\frac{3}{2}x + 1$, passanti per A(-6; 4).

_____

5) Tra le rette del fascio di centro P(-3; 5) trova la retta:

a) passante per il punto Q(2; -5)
b) parallela alla bisettrice del 2° e 4° quadrante
c) parallela all'asse *x*
d) parallela all'asse *y*
e) perpendicolare alla retta di equazione $y = \frac{1}{5}x + 5$
f) parallela alla retta che passa per i punti A(4; 7) e B(2; 5)

_____

Tabella di correzione e valutazione

Punti per esercizio	5	3	2	4	5	3	3	3	6	2	2	2	1,5	1,5	2,5	2,5	48		
n. es. / alunno	1	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	4	5 fascio	5a	5b	5c	5d	5e	5f	punti	stima	voto
1	1,5	0	2	4	5	3	3	3	6	0	0	0	1,5	1,5	0	0	30,5	7,08	**7**
2	3	3	0,5	4	5	3	0	0	6	2	2	0	1,5	1,5	0	0	31,5	7,25	**7,3**
3	3	3	0	2		0	1,5	1,5	6	2	1				0	0	20	5,33	**5,3**
4	4	3	2	0	5	3	3	3	4,5	2	2	2	1,5	1,5	2,5	2,5	41,5	8,92	**9**
5	3	3				3	3	0	3					1,5	0		16,5	4,75	**4,8**
6	5	3	0	4	3	3	3	2	6	2	1	2	1,5	1,5	2,5	2,5	42	9,00	**9**
7	5	3	0	2	3	0	0	0	6	2	0	2	0	0	0	0	23	5,83	**5,8**
8	5	3		2		3	1,5	1,5	6	2	0		0	1,5	0	0	25,5	6,25	**6,3**
9	3,5	1,5	0	2	0	3	0	1,5	4,5	2	2	2	1,5	1,5	2,5	0	27,5	6,58	**6,5**
10	1,5	3	0		1,5	3	3	3	6	2			0	0			23	5,83	**5,8**
11	1	3	0	0	0	0	1,5	1,5	6	2	2	2	1,5	1,5	2,5	2,5	27	6,50	**6,5**
12	5	3	2	4	5	3	3	3	6	2	2	2	1,5	1,5	2,5	2,5	48	10,00	**10**
13	5	2	2	4	5	3	3	3	6	2	2	2	1,5	1,5	2,5	2,5	47	9,83	**9,8**
14	1,5	3	0	4	5	3	1,5	0	4,5	2	0						24,5	6,08	**6**
15	5	3	2	4	5	3	3	3	6	2	2	2	1,5	1,5	2,5	2,5	48	10,00	**10**
16	5	3	2	4	5	3	3	3	6	2	2	2	1,5	1,5	0	0	43	9,17	**9**
17	5	0	2	0	5	3	3	3	6	2	2	2	1,5	1,5	2,5	2,5	41	8,83	**8,8**
18						2	2	1,5	6	2	0		0	0			13,5	4,25	**4,3**
19	0	3	1	4	4	0	3	1,5	6								22,5	5,75	**5,8**

Percorso introduttivo alla geometria analitica della retta

Gianna Zattoni, Liceo "B. Russell" - Cles

Scheda riassuntiva

Docente
Zattoni Gianna

Classe coinvolta
Classe seconda del Liceo delle scienze umane

Numero di alunni
23 alunni

Periodo dell'anno
Dal 10 febbraio al 31 marzo

Argomenti trattati
- Sistema di riferimento sulla retta e nel piano;
- Equazioni delle rette parallele agli assi e per l'origine in forma esplicita;
- L' equazione generale di una retta; forma esplicita e implicita;
- Rappresentazione grafica di una retta nel piano cartesiano;
- Fasci di rette;
- Interpretazione geometrica di un sistema di equazioni di primo grado a due incognite

Obiettivi di apprendimento
- Interpretare le soluzione di una equazione in due variabili come un determinato insieme di punti nel piano cartesiano;
- Rappresentare per punti il grafico di una retta;
- Rappresentare il grafico di una retta noto il coefficiente angolare e l'intercetta;
- Individuare l'equazione di una retta a partire dalla sua rappresentazione cartesiana;
- Rappresentare e risolvere graficamente un sistema lineare;

Modalità di lavoro
Circa la metà delle ore si sono svolte nel laboratorio di informatica dove le alunne hanno svolto nelle relative postazioni al computer attività di esplorazione con la guida dell'insegnante e attività individuali di ricerca e rielaborazione con l'ausilio di schede di lavoro. In classe si è svolto un lavoro di sistematizzazione dei concetti incontrati nelle attività di laboratorio e di correzione degli esercizi assegnati per casa. In laboratorio le alunne hanno utilizzato il software Geogebra che ha permesso una maggiore comprensione dei concetti di pendenza, intercetta, appartenenza, intersezione, sistema, fascio. Anche la correzione degli esercizi in classe è stata supportata dall'uso combinato della lavagna interattiva e dal software Geogebra.

Modalità di registrazione del lavoro da parte degli studenti
Appunti sul quaderno, schede da compilare, file di Geogebra da salvare nella propria area di lavoro

Numero unità orarie impiegate e loro consistenza
16 ore da 50 minuti compresa la verifica finale

Tipologia di verifica
Verifica scritta in classe della durata di 50 minuti.

Esiti della verifica

- Buono: 41%
- Discreto: 27%
- Sufficiente 14%
- Insufficiente 18%

Valutazione dell'attività

Le numerose attività proposte in laboratorio hanno stimolato la partecipazione e l'interesse delle alunne che hanno appreso con maggior facilità i concetti. I due terzi della classe ha raggiunto un buon livello di comprensione dell'argomento trattato.

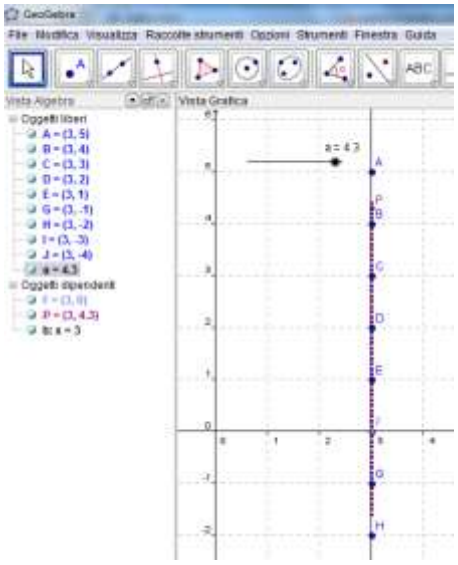
Allegati

- descrizione del percorso e verifica finale
- schede di lavoro proposte agli studenti
- file geogebra: Sistemi lineari_punto arlecchino

Descrizione dell'attività

(CLASSE: 2^ Liceo Scienze Umane - TEMPI: 16 ore compresa la verifica finale)

1^ ATTIVITÀ: retta // asse y



Si chiede agli alunni di rappresentare sul piano cartesiano, con geogebra dei punti allineati all'asse y; ad esempio a distanza 3.
Si osservano nella finestra algebrica le coordinate dei punti, in particolare la x costante uguale a 3 e la y variabile. Si guidano quindi gli alunni nella costruzione di un punto che si muova nel piano con ascissa vincolata a 3: si introduce cioè uno slider *a* e un punto di coordinate P(3, *a*); si attiva la funzione traccia sul punto P.
Si chiede agli alunni di tracciare la retta con il pulsante *retta per due punti* scegliendo due punti tracciati in precedenza e si osserva l'equazione della retta che compare nella finestra algebrica.
Si fa osservare agli alunni che la retta è formata da tutti e soli i punti che hanno coordinata x = 3.
Accanto alla retta con la funzionalità *Inserisci testo* si può aggiungere il testo: **retta di equazione x=3**.

2^ ATTIVITÀ: retta // asse x

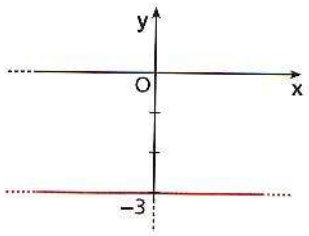
Chiedere agli alunni di introdurre uno slider e definire opportunamente un punto che muovendosi azionando lo slider lasci la traccia di una retta // all'asse x, ad esempio a quota 2. Dedurre poi l'equazione della retta. Si chiede poi agli alunni di tracciare la retta con il pulsante *retta per due punti* e di scrivere a fianco l'equazione della retta.

ESERCIZI assegnati per casa dal loro libro di testo[26]

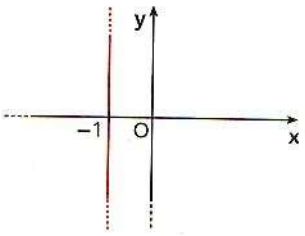
Come esemplificazione del tipo di esercizio, tratto dal libro di testo, che il docente utilizza in questo percorso.

Per ogni grafico scrivi l'equazione della retta corrispondente.

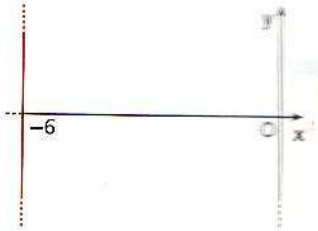
78



79



80



Disegna le rette che hanno le seguenti equazioni.

81 $x = -2$; $y = -2$; $x = 3$; $y = \frac{3}{2}$; $x = 1$.

82 $2x - 6 = 0$; $-3y = 0$; $3 - y = 0$; $5 - 10x = 0$; $2x = -8$.

[26] Bergamini, Trifone, Barozzi - La retta e i sistemi lineari (modulo E) - ZANICHELLI

3^ ATTIVITÀ: una retta passante per l'origine

Si chiede agli alunni di tracciare alcuni punti suggeriti dall'insegnante (ad esempio alcuni punti che stanno sulla retta per l'origine con pendenza 2). Si osserva con gli alunni la relazione tra la coordinata x e y dei vari punti. Quindi si chiede di definire un punto P che si muova sulla retta azionando uno slider. Sarà P(a, 2a). Si formalizza quindi la relazione: l'ordinata y è il doppio dell'ascissa x. Quindi y = 2x. Tracciando la retta per due punti viene visualizzata nella finestra algebrica l'equazione della retta. Si osserva che tutti i punti della retta hanno ordinata doppia dell'ascissa e viceversa, ogni punto che ha ordinata doppia dell'ascissa appartiene alla retta. Si ripropone la medesima attività scegliendo dei punti che individuino un retta con pendenza negativa. (es: y= -3x)

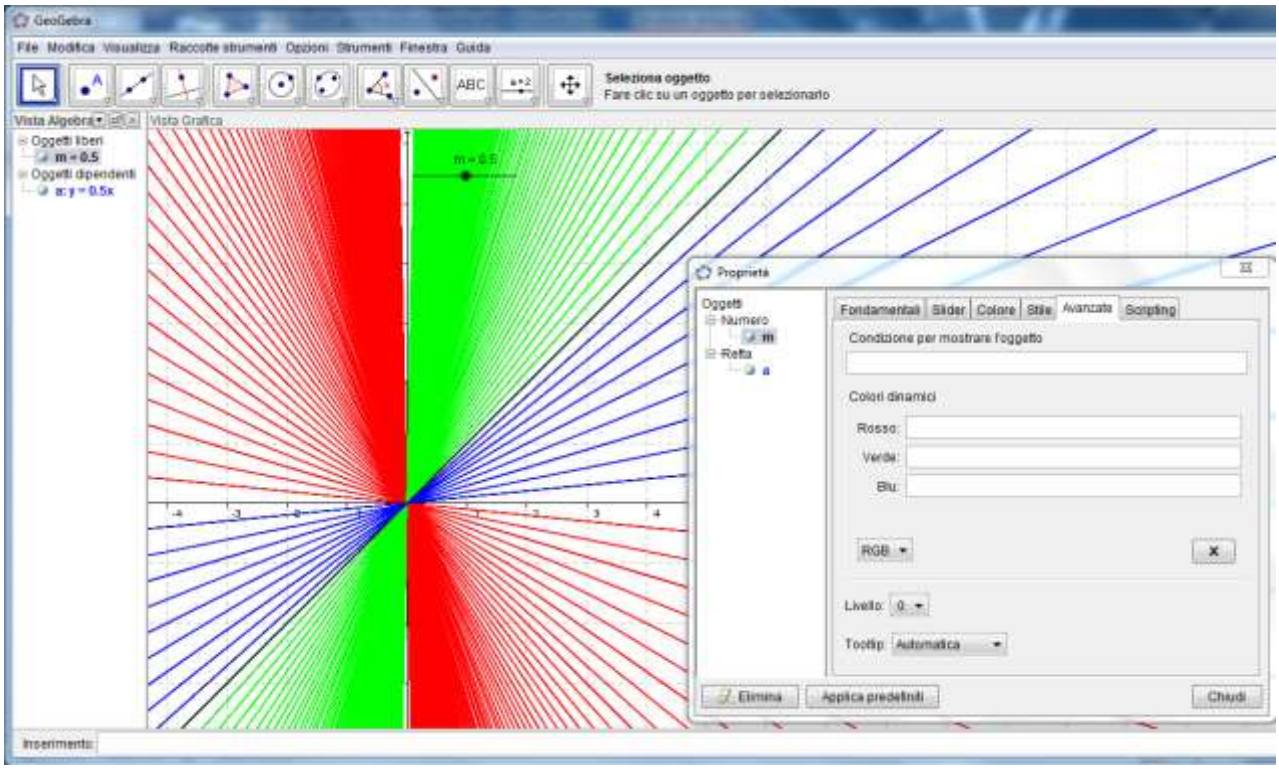
4^ ATTIVITÀ: rette passanti per l'origine

Si chiede agli studenti di tracciare con il pulsante *retta per due punti*, una serie di rette passanti per l'origine e se ne deduce l'equazione esplicitando la relazione tra la x e la y. Ad esempio partendo da pendenze intere positive (y = 3x, y = x, y = 4x), poi negative (y = -2x, y = -5 x, y = - x), quindi frazionarie positive (y = 1/2·x, y = 1/4·x, y = 2/3·x) e poi frazionarie negative (y = - 1/3·x, y = - 4/5·x). Conviene attivare l'opzione Cattura punto - vincola alla griglia, per facilitare la costruzione delle rette.

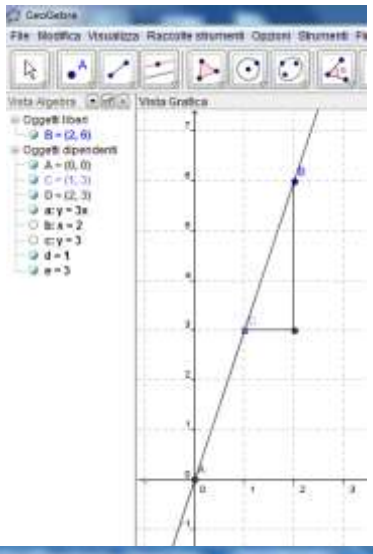
OSSERVAZIONE: dedurre la relazione tra y e x nei casi con pendenze frazionarie quali y = 2/3·x o y = - 4/5·x è risultato più impegnativo che nei casi con pendenze in cui Dx o Dy sono uguali a 1 .

5^ ATTIVITÀ: equazione retta per l'origine y = m x ; analisi qualitativa del parametro m

Si introduce uno slider m (min -50, max 50 e incremento 0.1) e l'equazione del fascio y = mx. Si osservano con gli alunni i casi: m>0 , m<0, m=0, m=1, m=-1. Attivando la funzione traccia sulla retta e animazione attiva sullo slider si riesce a visualizzare "parzialmente" il fascio. Utilizzando le Proprietà Avanzate sull'equazione della retta si può cambiare il colore delle rette. Ad esempio verde se m>1, blu se 0<m<1, rosso se m<0.

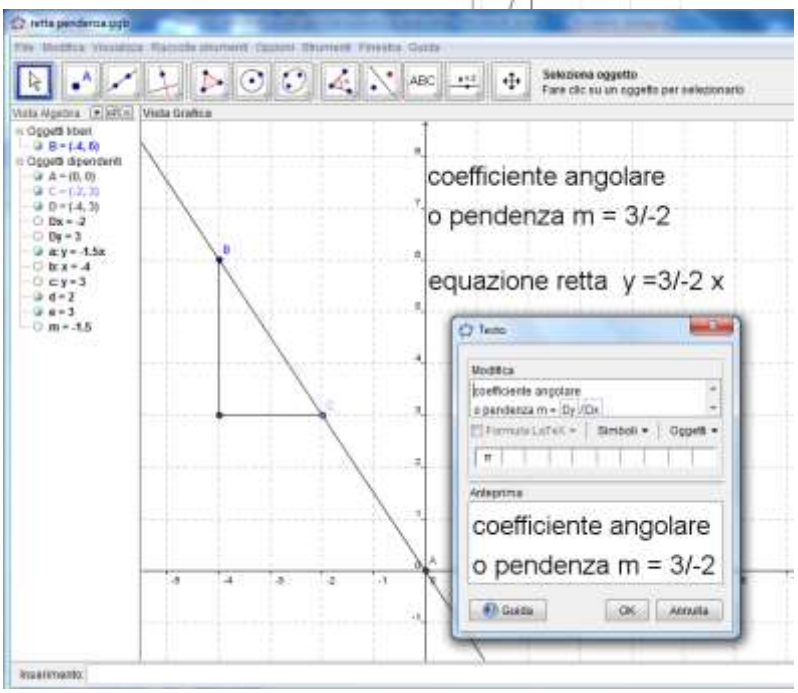


6^ ATTIVITÀ: definizione del coefficiente angolare m



Dopo aver tracciato una retta AB passante per l'origine, allo scopo di metterne in evidenza la pendenza si può tracciare un terzo punto C sulla retta, tracciare le parallele agli assi e costruire il segmenti Dx e Dy, nascondendo poi le rette. Posizionando quindi i punti B e C (preferibilmente sui nodi della griglia) si può osservare la costanza del rapporto tra Dy e Dx (eventualmente osservare la similitudine tra i vari triangoli che si vengono a formare).

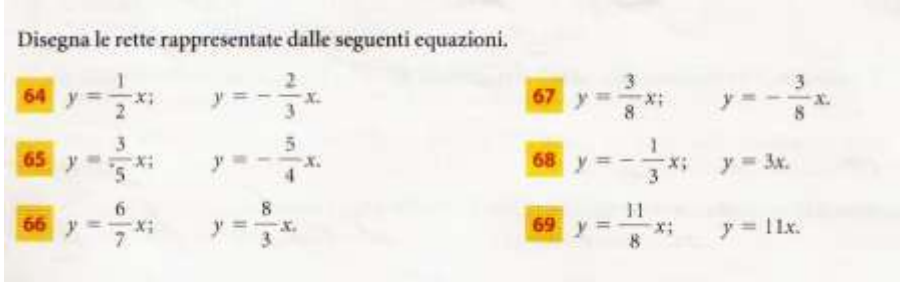
Si formalizza quindi la pendenza con la formula m = Dy/Dx , si introduce la casella di testo che ne riporta il valore e si scrive infine l'equazione della retta y = m x. (definire Dx = x(B)-x(C) , Dy = y(B) - y(C) e inserire nella casella di testo m = Dy/Dx ; inserire poi la casella di testo y = m x;
oppure inserire y= Dy/Dx *x)



Utilizzando quindi le schede di lavoro: **rette equazione grafico 1**, si invitano gli alunni a rappresentare rette e viceversa a dedurre dal grafico l'equazione della retta. Gli alunni verificano la correttezza del loro operato utilizzando quest'ultima costruzione di geogebra.
(Con questa attività gli alunni imparano a scegliere opportuni incrementi DX e Dy per ricavare la pendenza come rapporto tra numeri interi).

ESERCIZI assegnati per casa dal loro libro di testo[27]

Come esemplificazione del tipo di esercizio, tratto dal libro di testo, che il docente utilizza in questo percorso.



Disegna le rette rappresentate dalle seguenti equazioni.

64 $y = \frac{1}{2}x$; $y = -\frac{2}{3}x$.

65 $y = \frac{3}{5}x$; $y = -\frac{5}{4}x$.

66 $y = \frac{6}{7}x$; $y = \frac{8}{3}x$.

67 $y = \frac{3}{8}x$; $y = -\frac{3}{8}x$.

68 $y = -\frac{1}{3}x$; $y = 3x$.

69 $y = \frac{11}{8}x$; $y = 11x$.

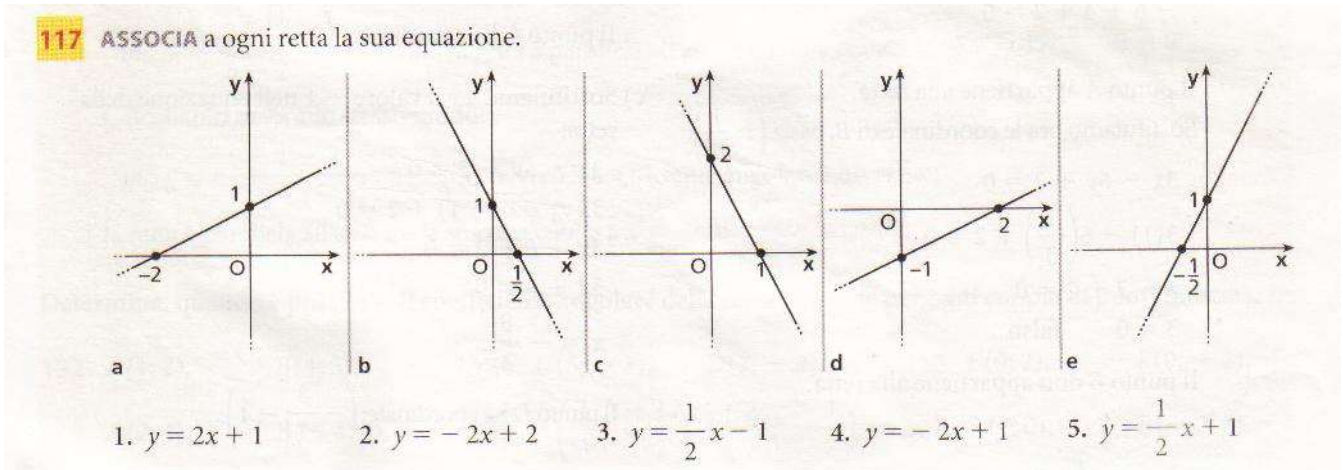
[27] Bergamini, Trifone, Barozzi - La retta e i sistemi lineari (modulo E) - ZANICHELLI

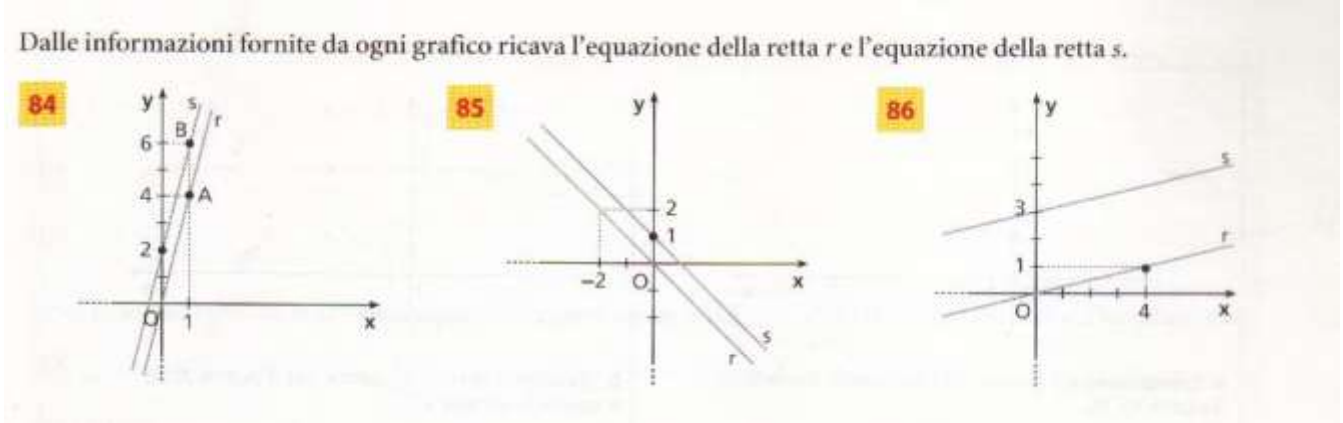
7^ ATTIVITÀ: retta generica - equazione esplicita

Si chiede agli alunni di tracciare alcuni punti suggeriti dall'insegnante (ad esempio alcuni punti che stanno sulla retta di pendenza 2 e intercetta all'origine uguale a 1). Quindi si chiede di definire un punto P che si muova sulla retta azionando uno slider. Si suggerisce agli alunni che si tratta delle retta di pendenza 2 alzata di 1. Sarà P(a, 2a+1). Si formalizza quindi la relazione: l'ordinata y è il doppio dell'ascissa x più 1. Quindi y = 2x+1. Tracciando la retta per due punti viene visualizzata nella finestra algebrica l'equazione della retta. Si ripropone la medesima attività scegliendo dei punti che individuino un retta con pendenza positiva e intercetta negativa (es: y=3x - 2) e poi scegliendo dei punti che individuino un retta con pendenza e intercetta negative. (es: y= -1/2 x - 1)

Utilizzando quindi le schede: **rette equazione grafico 2** si invitano gli alunni a rappresentare rette e viceversa a dedurre dal grafico l'equazione della retta. Gli alunni verificano la correttezza del loro operato utilizzando geogebra. Alcune rette sulle schede hanno una intercetta frazionaria; la fase di riconoscimento non ha creato particolari difficoltà, mentre la difficoltà di rappresentare rette di equazione $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ e $y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$ con il metodo "pendenza e intercetta" ha condotto all'opportunità di utilizzare il "metodo tabellare": scelgo coordinate opportune per l'ascissa e calcolo il corrispondente valore dell'ordinata. (Il metodo tabellare è stato utilizzato in classe con l'ausilio di geogebra sulla lavagna interattiva)

ESERCIZI assegnati per casa dal loro libro di testo[28]





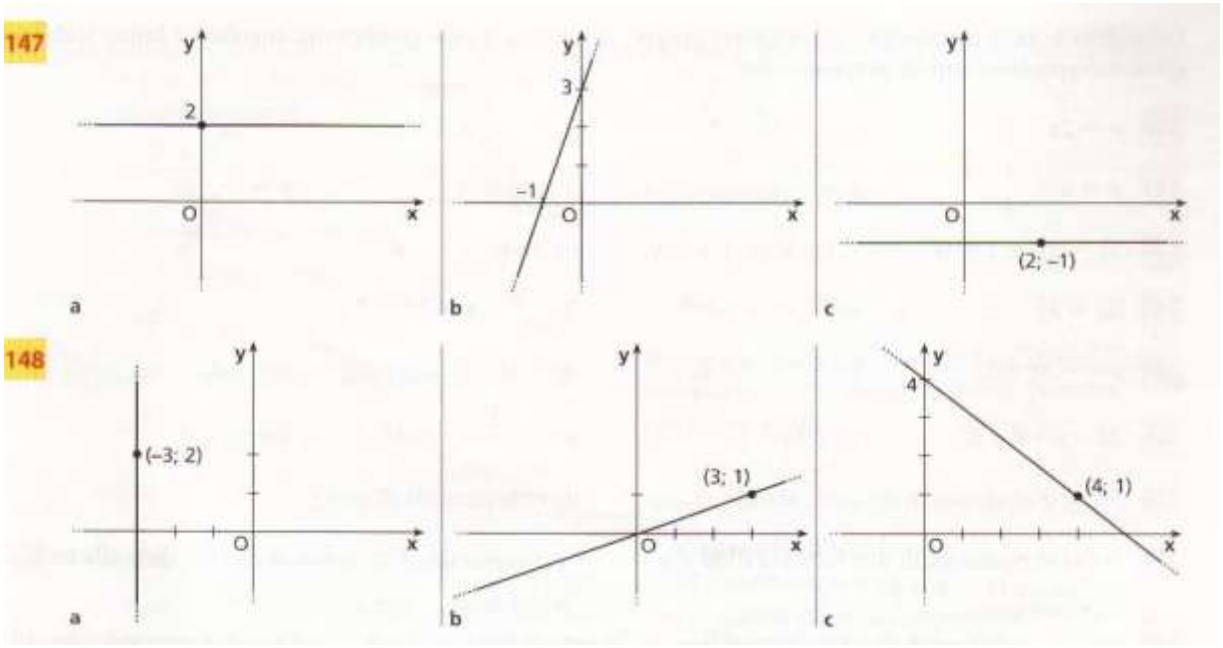
[28] Bergamini, Trifone, Barozzi - La retta e i sistemi lineari (modulo E) - ZANICHELLI

Disegna i grafici delle rette rappresentate dalle seguenti equazioni:

Come esemplificazione del tipo di esercizio, tratto dal libro di testo, che il docente utilizza in questo percorso[29].

89 $y = -3$
90 $x = -3$
91 $y = 2x + 1$
92 $y = -x + 3$
93 $y = -1$
95 $y = -3x - 2$
96 $y = -5x + 7$
97 $y = \frac{1}{2}x + 1$
98 $y = 2x - 6$
99 $x = -2$
101 $x = \frac{5}{3}$
102 $y = x + \frac{1}{4}$
103 $y = 2$
104 $y = -4x + 2$
105 $y = -\frac{1}{2}x + 3$

Scrivi l'equazione della retta utilizzando le informazioni fornite dal grafico:



8^ ATTIVITÀ: in classe, teoria in sintesi

Gli alunni hanno formalizzato sui loro quaderni i concetti incontrati nelle attività di laboratorio con geogebra: equazione esplicita della retta - pendenza m - intercetta q - significato del segno di m - scelta del metodo "pendenza e intercetta" o del "metodo tabellare" - Si è introdotta la forma generale dell'equazione della retta e proposti esercizi di trasformazione dalla forma implicita a quella esplicita.

Esempi di esercizi assegnati per casa dal loro libro di testo:

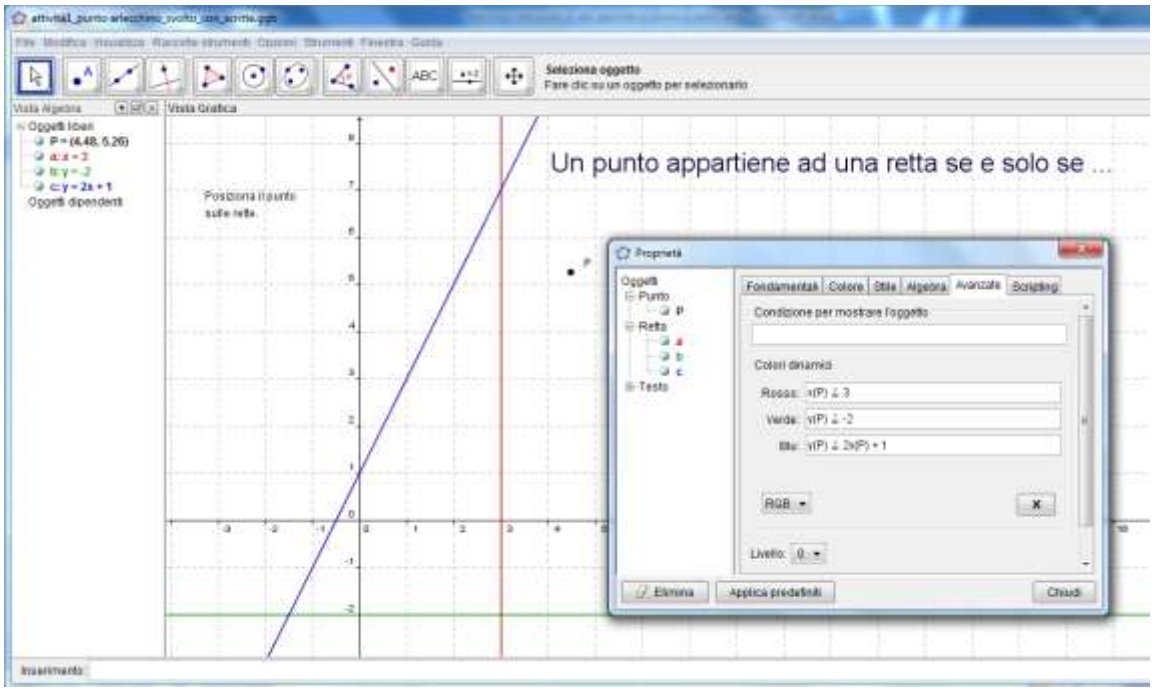
Disegna i grafici delle rette rappresentate dalle seguenti equazioni, indicando per ciascuna il coefficiente angolare e il termine noto.

113 $x - 2y = 0$; $6x = 0$; $2y - 2 = 0$; $y = 2x$.
114 $x = -3y$; $\frac{5}{3}y = 0$; $2y = -4x + 3$; $4x - y + 1 = 0$.
115 $x + y - 3 = 0$; $2x + 1 = 0$; $y = -2$; $x = -\frac{1}{2}y + 1$.

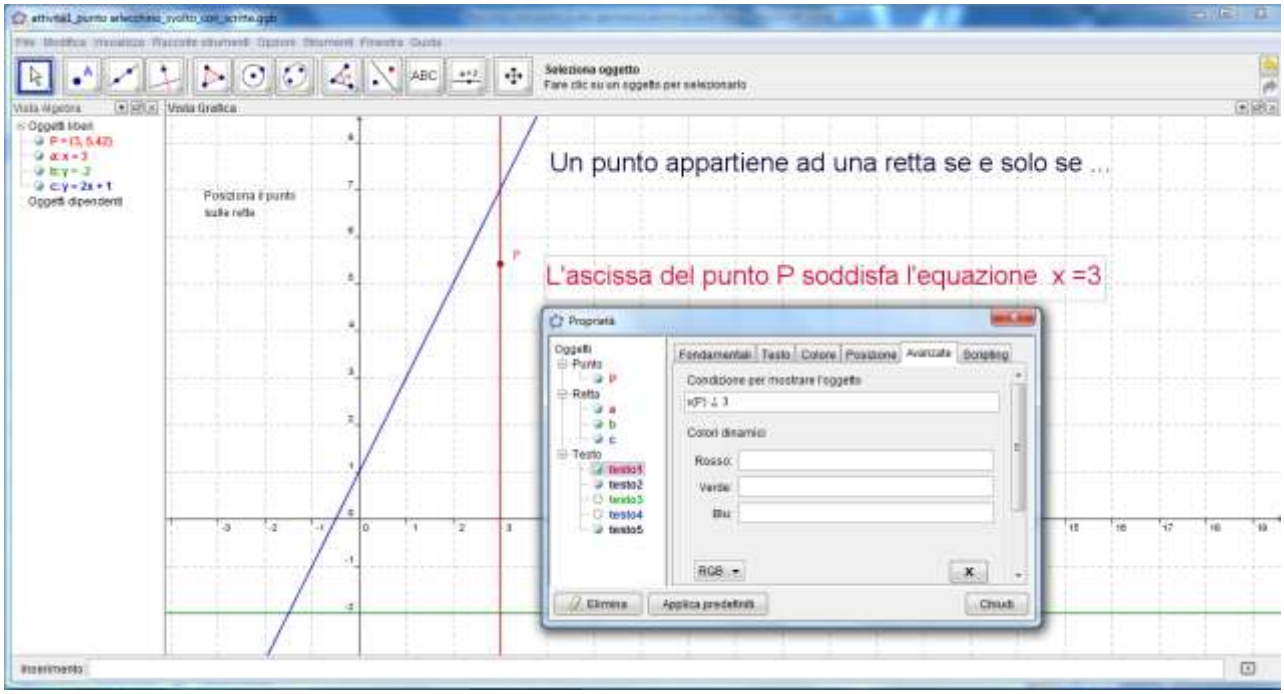
[29] Bergamini, Trifone, Barozzi - La retta e i sistemi lineari (modulo E) - ZANICHELLI

9^ ATTIVITÀ: appartenenza di un punto ad una retta

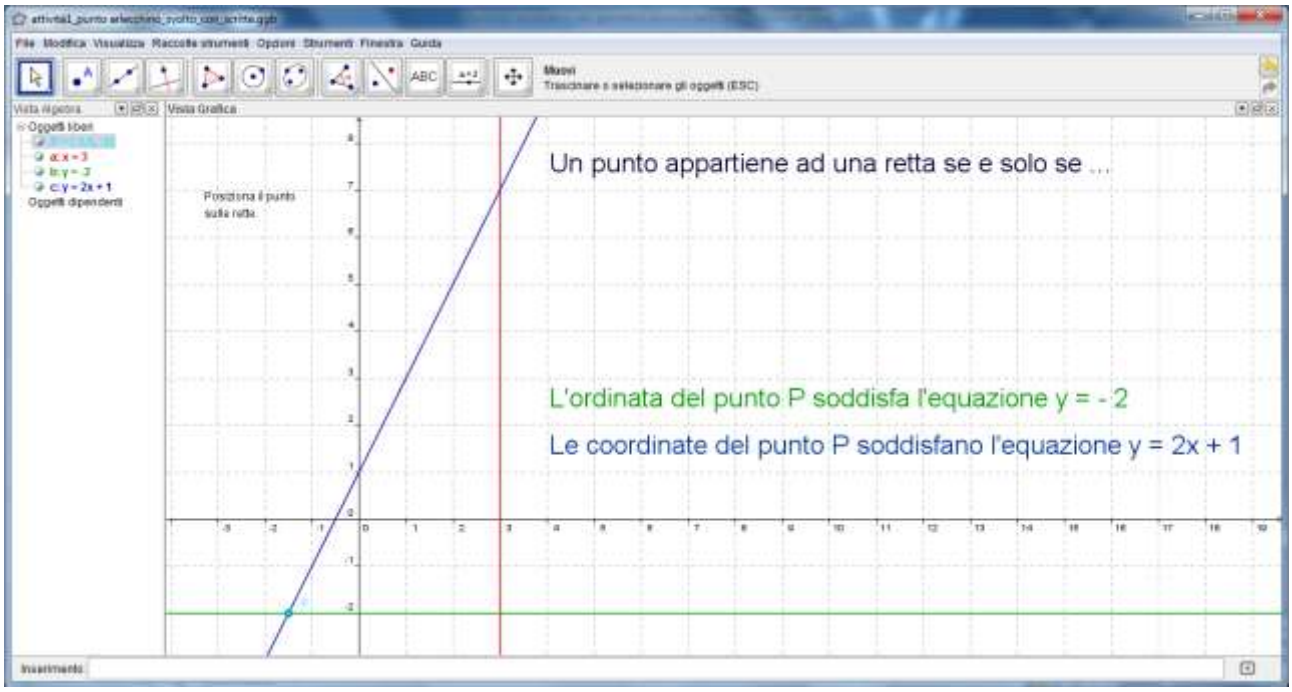
Si predispone un file di GeoGebra con disegnate tre rette (una // all'asse x, una all'asse y e una generica) di tre colori diversi (rosso, verde, blu) e un punto P. Si chiede agli alunni di completare la frase: "Un punto appartiene ad una retta se e solo se ... ". Quindi si chiede di fare in modo che trascinando il punto esso assuma il colore della retta qualora venga posizionato su di essa.



Si chiede infine di completare il file in modo che compaiano le scritte di appartenenza del punto ad una retta con la relativa equazione qualora il punto venga posizionato su di essa.



Nei punti di intersezione dovranno apparire due scritte. (Soluzione grafica di sistemi lineari)



ESERCIZI assegnati per casa dal loro libro di testo[30]:

Come esemplificazione del tipo di esercizio, tratto dal libro di testo, che il docente utilizza in questo percorso.

Per ogni retta assegnata stabilisci se i punti A e B le appartengono.

121 $y = 2x - 1$, $A\left(\frac{1}{2}; -3\right)$, $B(1; -1)$. [no]

122 $y = \frac{1}{5}x + 2$, $A(-5; 3)$, $B(10; 4)$. [A no; B sì]

123 $2x - 6y + 3 = 0$, $A\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$, $B\left(-1; \frac{1}{6}\right)$. [sì]

124 $8x + 4y - 5 = 0$, $A(1; -3)$, $B\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right)$. [no]

125 Nella retta $y = 1 - x$ determina il punto A di ascissa -1 e il punto B di ordinata 7. [$A(-1; 2)$, $B(-6; 7)$]

126 Determina nella retta $y = -\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$ il punto A di ascissa -2 e il punto B di ordinata $\frac{2}{3}$. $\left[A\left(-2; \frac{5}{3}\right), B\left(0; \frac{2}{3}\right)\right]$

I seguenti esercizi sono stati assegnati per casa e corretti in classe utilizzando la rappresentazione dei fasci con GeoGebra. (slider k, traccia attiva sull'equazione del fascio, animazione attiva sul k).

129 Trova per quale valore di k la retta di equazione $y = 4x + k$ passa per il punto $P(2; 5)$. [-3]

130 Determina k in modo che la retta di equazione $2kx + y - k + 1 = 0$ passi per il punto $A(-2; -3)$. $\left[-\frac{2}{5}\right]$

10^ ATTIVITÀ: soluzione grafica di sistemi lineari

Agli alunni erano già a conoscenza di alcuni metodi algebrici per la soluzione di sistemi lineari. In classe con l'ausilio della lavagna interattiva e geogebra gli alunni hanno associato le equazioni lineari alla rette e "l'esito" del sistema alle posizioni reciproche delle rette.

11^ ATTIVITÀ: verifica cartacea. (tempo a disposizione 45 minuti)

Segue la verifica e la valutazione.

30 Bergamini, Trifone, Barozzi - La retta e i sistemi lineari (modulo E) - ZANICHELLI

	Liceo B. Russell VIA IV NOVEMBRE 35, 38023 CLES	**Indirizzo: LICEO delle Scienze Umane** **Classe: XXX Data: 31 marzo 2012** Verifica su: rette nel piano cartesiano, equazioni lineari e sistemi

Nome:_____ **Cognome:** _____

1. Indica quali delle seguenti equazioni rappresentano una retta e quali no:
(1 *punto*)

$3x - y + 1 = 0$	☐ si	☐ no
$x - 2 = 0$	☐ si	☐ no
$x^2 + y - 2 = 0$	☐ si	☐ no
$x = y$	☐ si	☐ no
$2x + xy - 3 = 0$	☐ si	☐ no

2. Individua il coefficiente angolare (pendenza) **m** e l'ordinata all'origine **q** delle seguenti rette:
(2 punti)

$y = 5x - 1$ ……..…… m = …..… q = ……..

$y + x = 2$ ……..…….…... m = …..… q = ……..

$3y - 4 = 0$ ……..... m = …..… q = ……..

$2x - 5y - 10 = 0$ ……...……...…… m = …..… q = ……..

3. Il punto $P(3, -1)$ appartiene alla retta di equazione $y = \frac{1}{3}x - 2$? Motiva la risposta.
(1 punto)

……

……

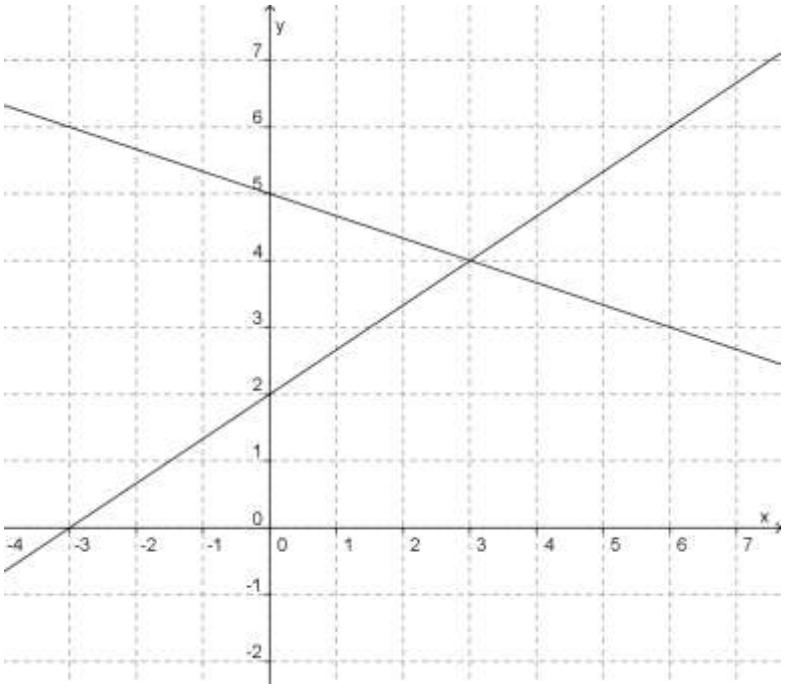
4. Determina *k* in modo che la retta di equazione $2kx + y - k + 1 = 0$ passi per il punto $A(-2, -5)$.
(2 punti)

……

……

5. Risolvi <u>graficamente</u> il seguente sistema: $\begin{cases} y+1=2x \\ y-2x-3=0 \end{cases}$ (2 punti)

6. Scrivi il sistema che corrisponde alla coppia di rette rappresentate. Risolvilo algebricamente e verifica se il risultato è in accordo con il grafico. (2 punti)



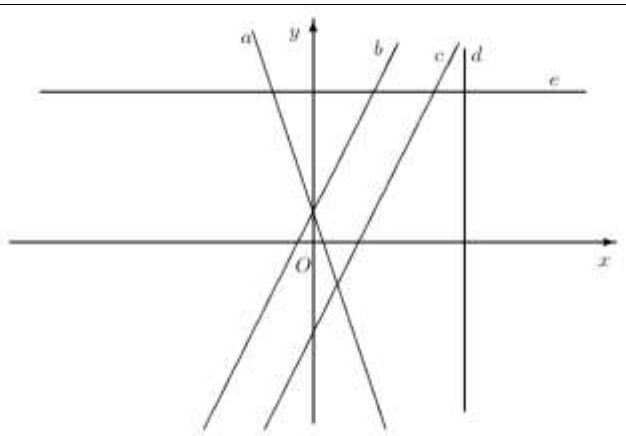
7. Traccia il grafico della retta di equazione sotto indicata. (2 punti)

$y = 3x - 2$	$y = -x + 3$
$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$	$x = 4$

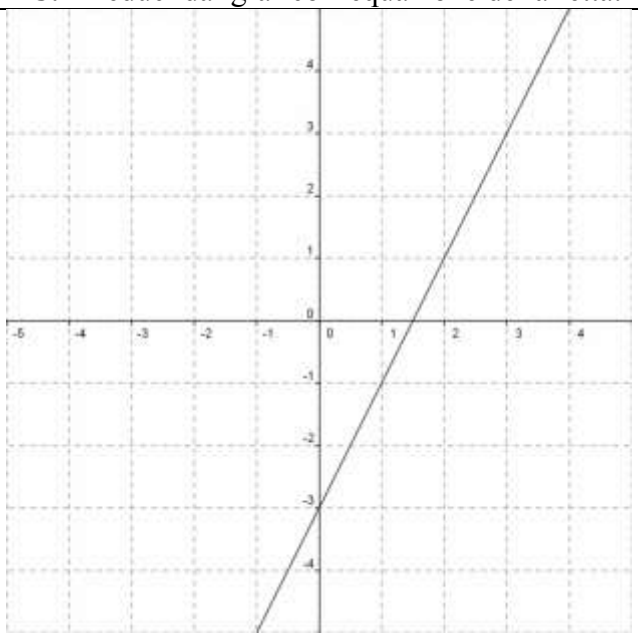
8. Nel seguente grafico sono rappresentate le rette di equazione: (1 punto)

□ $y = 2x + 1$
□ $y = -3x + 1$
□ $y = 4$
□ $y = 2x - 2$
□ $x = 4$

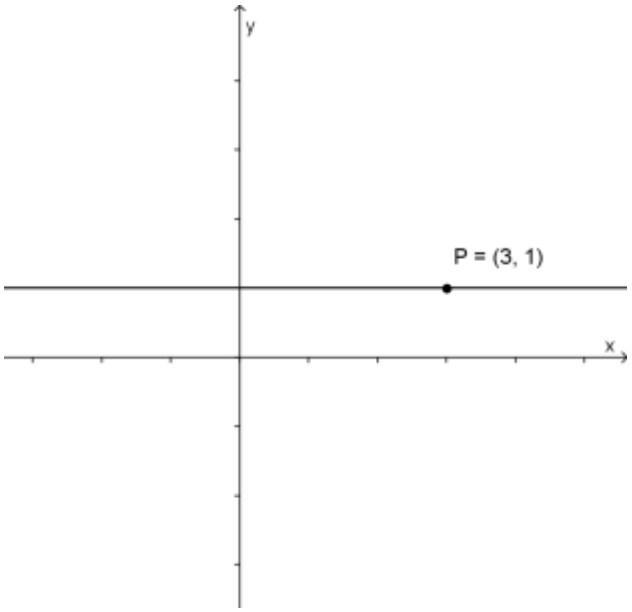
Indica nel quadratino quale delle rette a, b, c, d, e corrisponde a ciascuna equazione.



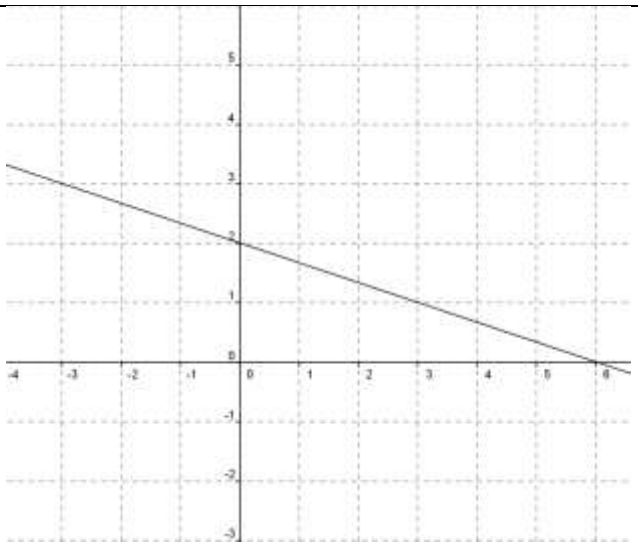
9. Deduci dal grafico l'equazione della retta: (2 punti)



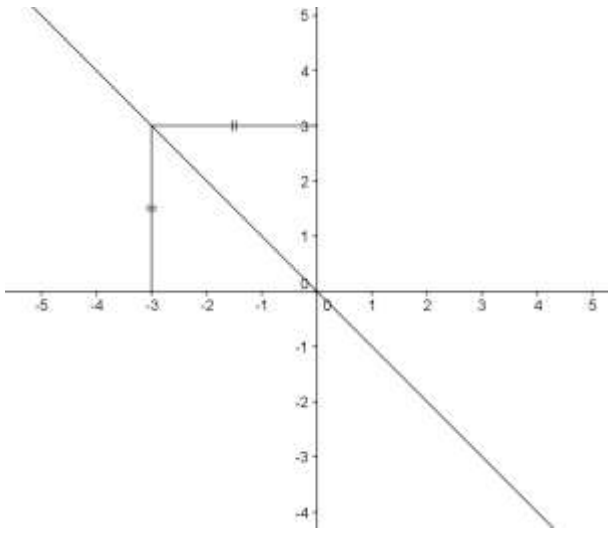
……



……



……



……

10. Fornisci un esempio di equazioni di una coppia di rette che:
(1 punto)

- non si intersecano ……..……..

- si intersecano nel punto (1, 3) ……..……..

Sufficienza con 8 punti.

Correzione e valutazione

2UA	1 riconoscere eq. retta	2 individuare m, q	3 appartenenza punto-retta	4 trovare k /retta passi per P	5 soluzione grafica sistema	6 dal grafico al sistema + soluzioni algebriche	7 dall'equazione al grafico	8 mix rette	9 dal grafico all'equazione	10 coppia rette tali che ...		punti	stima	VOTO
31/03/2012	1	2	1	2	2	2	2	1	2	1		16	10,00	
alunno														
1	0,5	0,25	0		0,5		1	1	0,75	0,25		4,25	4,13	**4,5**
2	1	1,5	0,75	1,75	0,5	0,75	1,75	1	1,5	1		11,50	7,75	**7,7**
3	1	1,5	0,5	1,75	1	0,75	1,75	1	1,5	0,75		11,50	7,75	**7,7**
4	1	1,5	1	1	2	1,5	1,5	1	1,5	0,5		12,50	8,25	**8**
5	1	1,5	0,75	1,5	2	0,5	1,75	1	1,5	1		12,50	8,25	**8**
6	1	1,75	1	1	1	0,75	0,75	1	1	1		10,25	7,13	**7**
7	1	1,5	1	2	2	1,5	2	1	2	1		15,00	9,50	**9,5**
8	1	1,25	1	2	2	2	2	1	2	1		15,25	9,63	**9,5**
9	0,75	0,25	0		0,5	1,25	1,75	1	1,5	0,25		7,25	5,63	**5,7**
10	1	1,25	0,5		1,5	0,5	1,5	1	1,75	1		10,00	7,00	**7**
11	0,75	2	0,75	2	2	2	1,75	1	1,5	1		14,75	9,38	**9,3**
12	1	1	0,75	2	0	0,5	2	1	1,25	0		9,50	6,75	**6,7**
13	1	1	0,75	2	1,5	0,75	1,75	1	1,5	1		12,25	8,13	**8**
14	1	1,5			2	0,5	1,75	1	1,5	1		10,25	7,13	**7**
15	0,5	2	0,75		0,5	0,75	0,75	0,75	1,5	1		8,50	6,25	**6,3**
16	0,5	2	0,25	2	2	0	1,75	1	1	1		11,50	7,75	**7,7**
17	0,25	0,5			0,25	1,25	1,25	1	1			5,50	4,75	**5**
18	1	2	0	0	1	1,25	1,5	0,75	1,5	1		10,00	7,00	**7**
19	1	0	0			0,5	0,75	1	0,75			4,00	4,00	**4**
20	0,75	1,5	0,5	1	2	0,75	1,25	1	0,75	0		9,50	6,75	**6,7**
21														**assente**
22	0,75	0,5	0		0		0,5	0,75	0,5			3,00	3,50	**4**
23	1	2	0,25	2	0,5	0,75	0,75	0,75	1,25	0		9,25	6,63	**6,5**

Il punteggio evidenziato in giallo è da ritenere significativamente positivo. Su un totale di 22 alunne più della metà ha raggiunto una valutazione dal 7 in su. Le due alunne con il voto evidenziato in arancione non hanno mai raggiunto nel corso dell'anno valutazioni sufficienti.

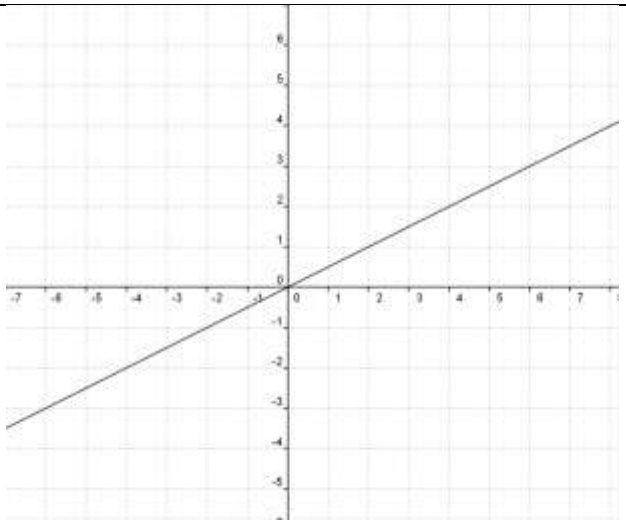
Osservazione finale

il percorso presentato va arricchito con la proposta di problemi e situazioni prese da contesti reali semplici e familiari, che possono essere formalizzati e analizzati utilizzando una modello lineare.

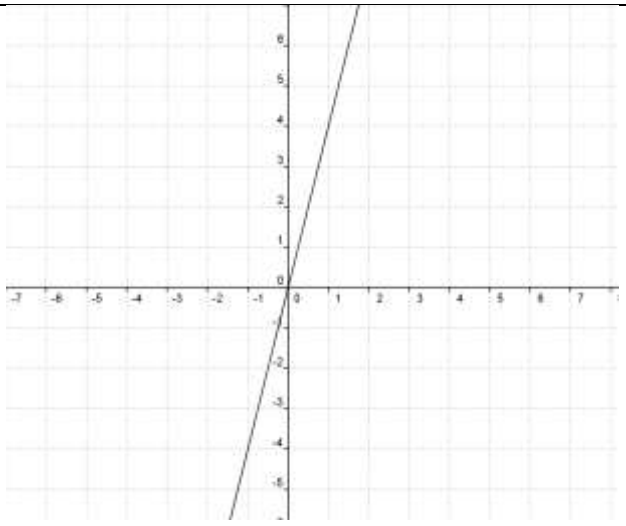
Traccia i grafici delle rette rappresentate dalle equazioni indicate.

$y = 3x$	$y = -0{,}5x$
$y = \frac{1}{4}x$	$y = -x$
$y = 0{,}2x$	$y = -\frac{5}{3}x$

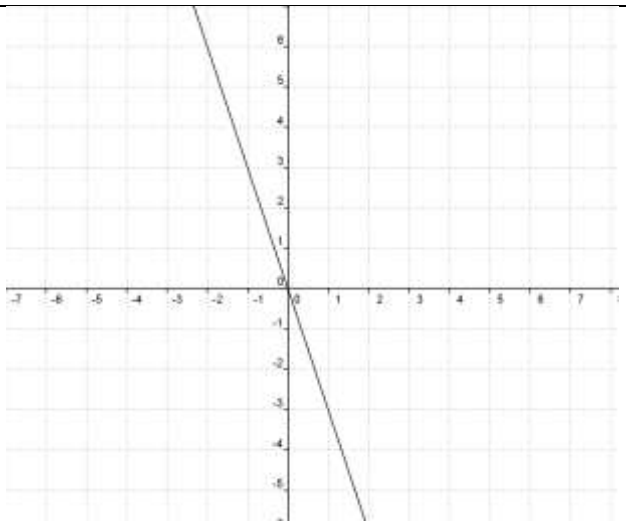
Deduci dal grafico il **coefficiente angolare** o **pendenza *m*** e scrivi l'equazione della retta $y = mx$



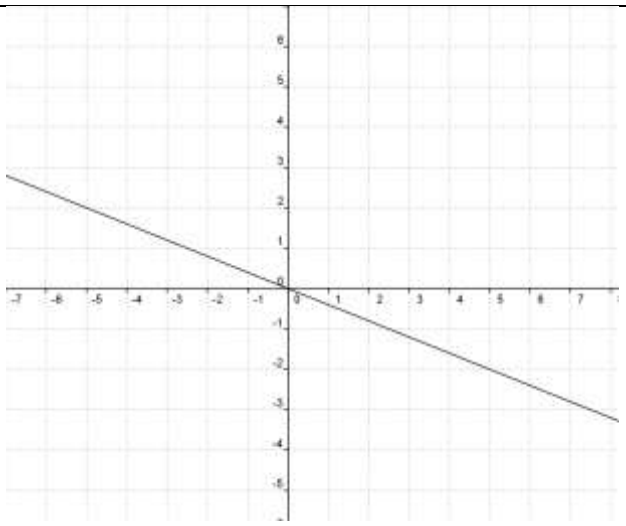
$m = \frac{\quad}{\quad} =$ $y =$



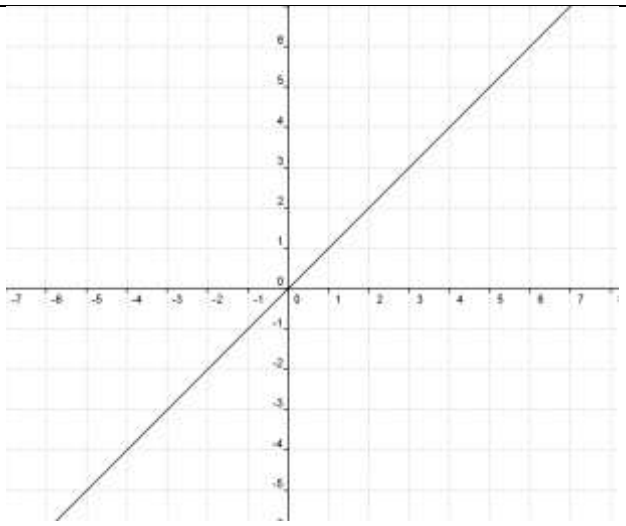
$m = \frac{\quad}{\quad} =$ $y =$



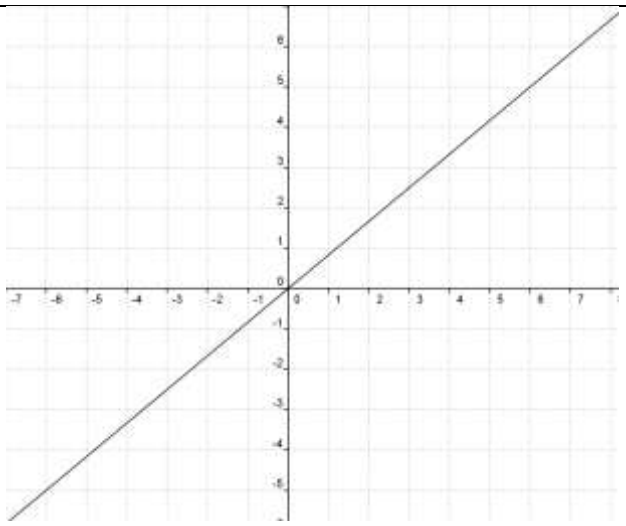
$m = \frac{\quad}{\quad} =$ $y =$



$m = \frac{\quad}{\quad} =$ $y =$



$m = \frac{\quad}{\quad} =$ $y =$



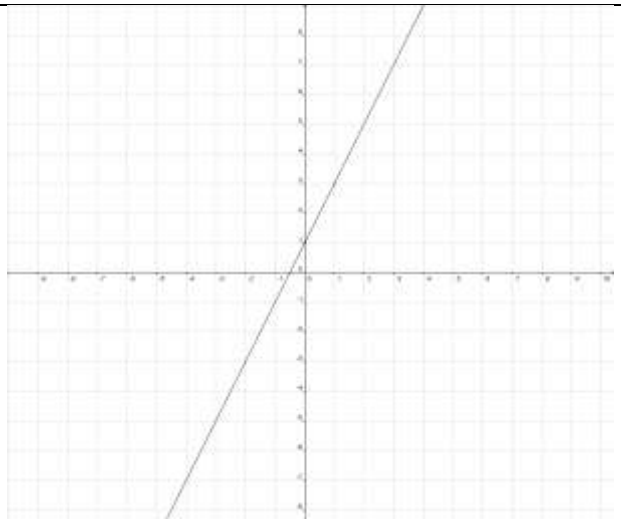
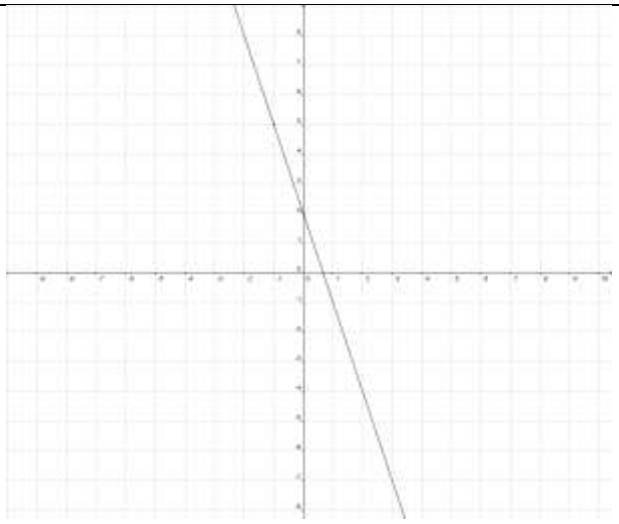
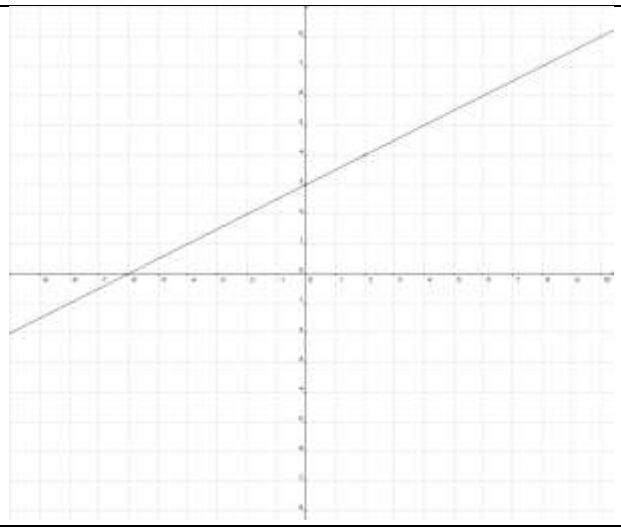
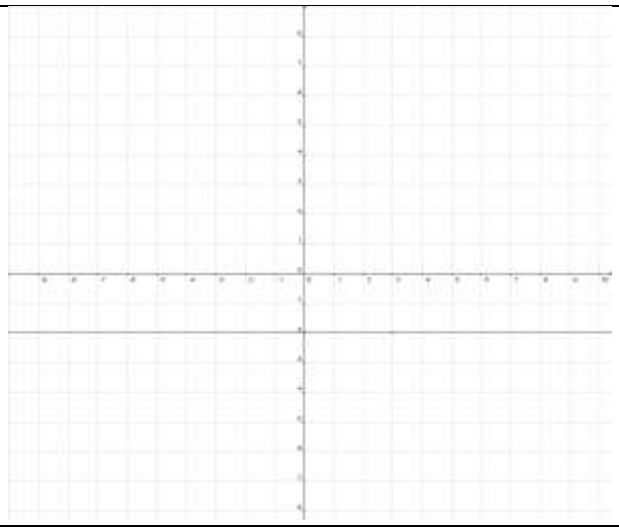
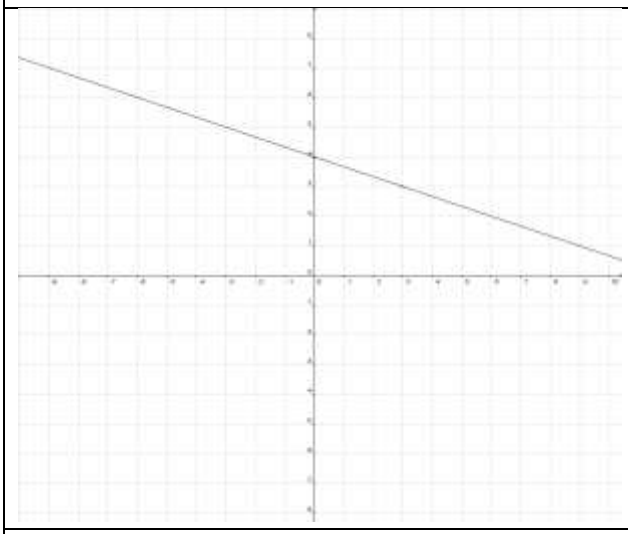
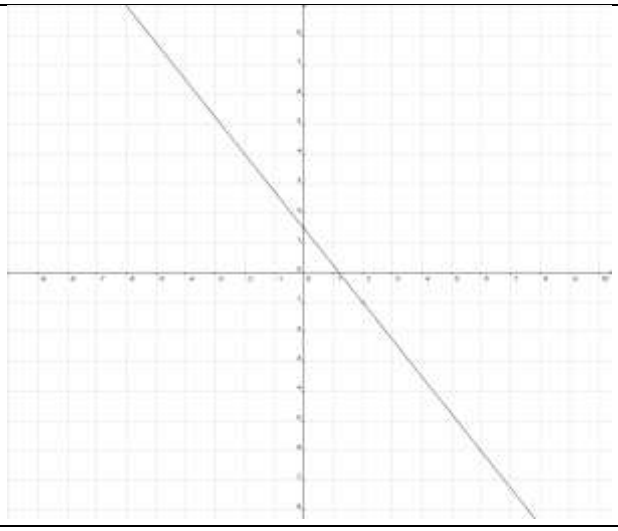
$m = \frac{\quad}{\quad} =$ $y =$

ALLEGATO: rette equazione grafico 2

Traccia i grafici delle rette rappresentate dalle equazioni indicate.

$y = 6x - 4$	$y = \frac{1}{2}x + 3$
$y = 5$	$y = -x + 2$
$y = -\frac{4}{5}x + 1$	$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

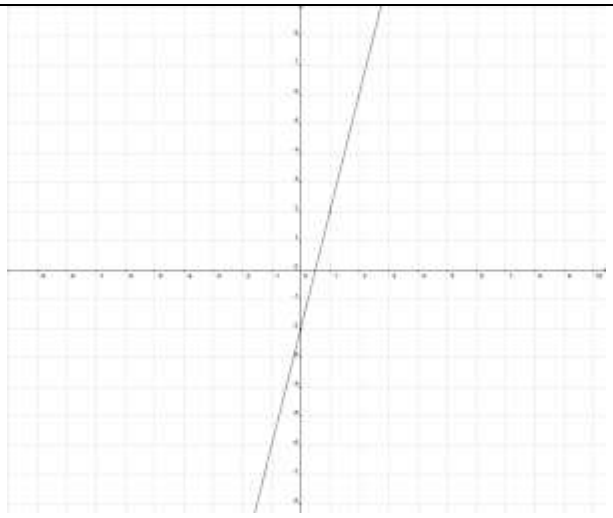
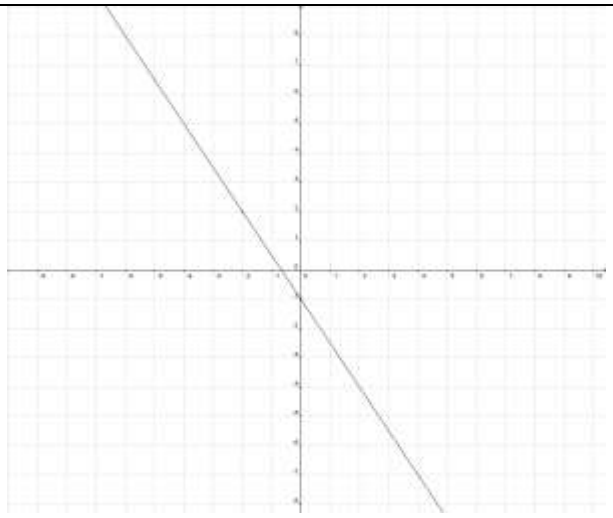
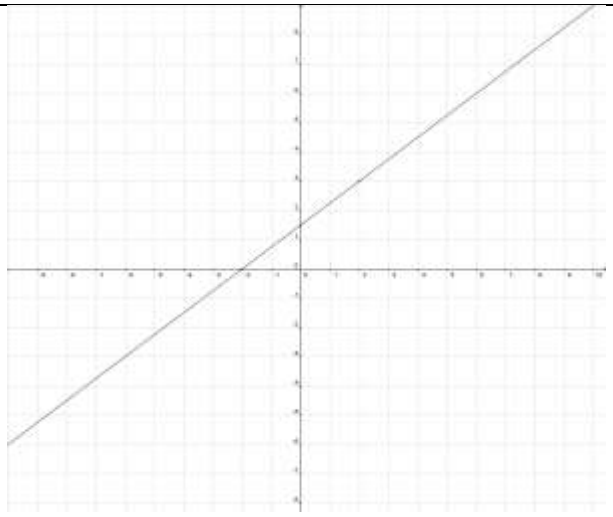
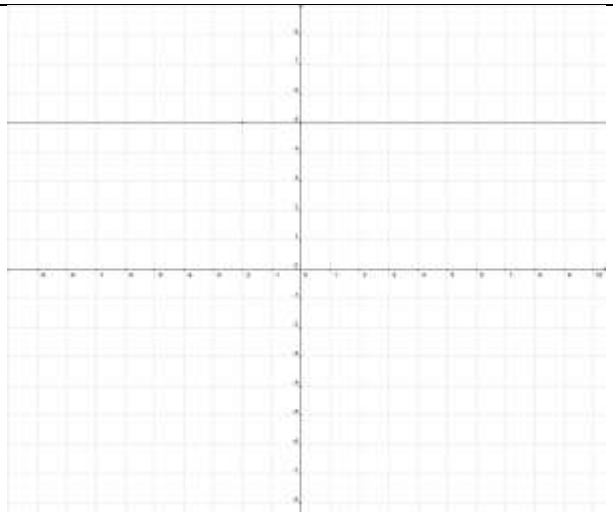
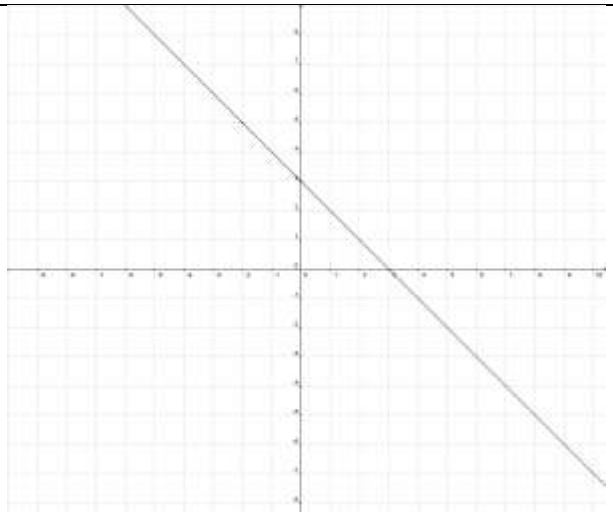
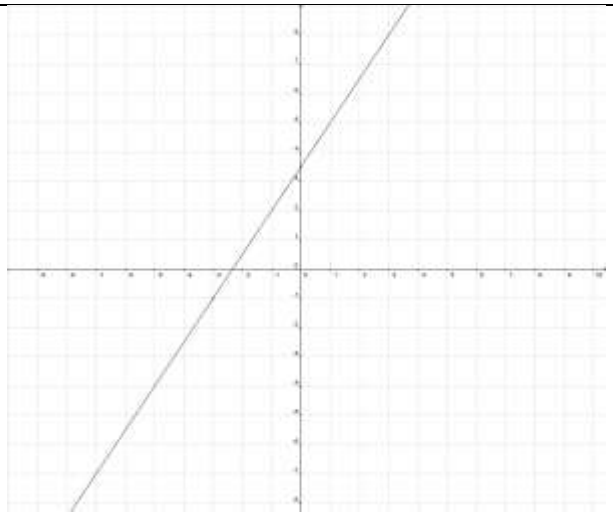
Deduci dal grafico il **coefficiente angolare** o **pendenza *m***, l'**ordinata all'origine *q*** e scrivi l'equazione della retta $y = mx + q$

	
$m =$ ——— $=$ $q =$ $y =$	$m =$ ——— $=$ $q =$ $y =$
	
$m =$ ——— $=$ $q =$ $y =$	$m =$ ——— $=$ $q =$ $y =$
	
$m =$ ——— $=$ $q =$ $y =$	$m =$ ——— $=$ $q =$ $y =$

Traccia i grafici delle rette rappresentate dalle equazioni indicate.

$y = 5x - 2$	$y = -4$
$y = \frac{3}{2}x + 1$	$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
$y = \frac{4}{5}x - 1$	$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

Deduci dal grafico il **coefficiente angolare** o **pendenza *m***, l'**ordinata all'origine *q*** e scrivi l'equazione della retta $y = mx + q$

<table>
<tr><td>  </td><td>  </td></tr>
<tr><td>$m = \frac{\quad}{\quad} =$ $q =$ $y =$</td><td>$m = \frac{\quad}{\quad} =$ $q =$ $y =$</td></tr>
<tr><td>  </td><td>  </td></tr>
<tr><td>$m = \frac{\quad}{\quad} =$ $q =$ $y =$</td><td>$m = \frac{\quad}{\quad} =$ $q =$ $y =$</td></tr>
<tr><td>  </td><td>  </td></tr>
<tr><td>$m = \frac{\quad}{\quad} =$ $q =$ $y =$</td><td>$m = \frac{\quad}{\quad} =$ $q =$ $y =$</td></tr>
</table>

Trasformazioni geometriche

Claretta Carrara, Liceo "B. Russell" - Cles

Scheda riassuntiva

Geometria triennio: trasformazioni geometriche 2011/2012

Docente

Claretta Carrara Liceo “Bertrand Russell” Cles

Classi coinvolte

3C, 3D, 4C (PNI) Liceo “Bertrand Russell” Cles

Numero di alunni per classe

3C: 15, 3D:14, 4C:18

Periodo dell’anno e numero unità orarie impiegate

- 3C: dal 17 gennaio al 20 marzo (10 ore compresa la verifica)
- 3D: dal 12 aprile al 26 maggio (12 ore compresa la verifica)
- 4C: dal 21 dicembre al 14 marzo (20 ore compresa la verifica)

Argomenti trattati

In **terza:** isometrie, punto di vista geometrico. Definizione di trasformazione geometrica del piano e di isometria. Le quattro isometrie: definizione e caratteristiche, trasformazioni dirette e inverse. Punti e rette fisse. Come individuare le caratteristiche di un'isometria nota l'immagine di un triangolo. Sperimentazione del teorema delle tre riflessioni. Equazioni delle traslazioni, delle simmetrie centrali e delle simmetrie assiali rispetto ad assi orizzontali, verticali o rispetto alle due bisettrici dei quadranti.
In **quarta**: affinità. Per quanto riguarda le isometrie si è affrontato inizialmente l'argomento come in terza. Oltre a questo si è analizzato l'argomento anche dal punto di vista delle equazioni di ogni isometria e di ogni affinità.

Obiettivi di apprendimento

Conoscere le principali trasformazioni geometriche, riconoscere le loro proprietà sapendole utilizzare per costruzioni geometriche elementari.

Modalità di lavoro

In terza abbiamo lavorato quasi esclusivamente in aula di informatica, sostanzialmente singolarmente. In classe sono state utilizzate due o tre ore di ripasso o rielaborazione degli aspetti teorici.
In quarta abbiamo utilizzato circa la metà delle ore in aula di informatica, sostanzialmente singolarmente. L'altra metà delle ore sono state effettuate in classe per svolgere esercizi con l'uso delle equazioni.

Modalità di registrazione del lavoro da parte degli studenti

Appunti, file GeoGebra e verifica finale.

Tipologia di verifica

Prova scritta con domande a risposta aperta e qualche esercizio

Esiti della verifica

verifica 3C (50 minuti). Risultati: 14 sufficienti, 1 insufficiente, voto medio 8, voto massimo 9.5 (vedi la prova di verifica allegata)**.**
verifica 4C (100 minuti). Risultati: 15 sufficienti, 3 insufficienti, voto medio 6.3, voto massimo 8. La parte più teorica e geometrica è stata svolta correttamente, mentre ci sono stati maggiori problemi sugli esercizi relativi alle equazioni (vedi la prova di verifica allegata)**.**

Valutazione dell'attività

In entrambe le classi l'uso di GeoGebra ha permesso una maggiore visualizzazione delle trasformazioni. Questo ha facilitato la comprensione e memorizzazione delle caratteristiche di ogni trasformazione.
Una buona parte degli studenti ha svolto gli esercizi con GeoGebra con un certo entusiasmo, dimostrando anche ottime capacità intuitive nella sperimentazione.
Nelle classi terze la rielaborazione a casa degli aspetti teorici è stata soddisfacente, facilitata dalla disponibilità di note appositamente redatte e da maggiori pause di ripasso-interrogazione.

Note per la descrizione del percorso

- In 3C: capitolo 2, Definizioni, capitolo 3, Punto di vista geometrico, capitolo 8, Schede di lavoro con GeoGebra
- In 4C: tutto

Le note sono state fornite agli studenti che potevano scaricarle da Claroline. Tutti i contenuti sono però stati affrontati in classe e gli appunti di ogni studente sarebbero stati sufficienti.
Schede di lavoro con GeoGebra (cap. 8 delle note)

Descrizione del percorso

- Lezione introduttiva (1 ora in 3C, 2 ore in 4C).
- Lavoro in laboratorio (circa 6 ore, 2 ore per scheda).
- In 3C: 2 ore per riprendere alcuni concetti e dimostrazioni.
- In 4C: 12 ore in classe per lavorare sulle equazioni di un'isometria e per lavorare sulle affinità.

Descrizione dell'attività

Avvertenze

- Il Capitolo 1 può essere completamente tralasciato nell'ottica di studiare le trasformazioni.
- I Capitoli 2, 3 e 8 possono essere utilizzati anche al biennio o nei corsi in cui le trasformazioni non vengono approfondite.
- Alcune cose sono ripetute, in particolare nei Capitoli 3 e 4, perché tali capitoli sono sostanzialmente indipendenti.
- Parte delle note sono prese da:
  - Courant e Robbins: *Che cos'è la matematica* - Bollati Boringhieri,
  - Alessandro Perotti (Università degli studi di Trento): *Note per il corso di Geometria elementare*,
  - Preziosi suggerimenti ed esercizi della Professoressa Francesca Arrigoni.

CAPITOLO 1

Introduzione

Confronto tra figure

Il termine **uguali**, attualmente tradotto in **congruenti** si basa sul concetto di uguali in aspetto fisico, cioè di **sovrapponibilità**. Il movimento rigido che permette di considerare la sovrapponibiltà è dato da Euclide come concetto intuitivo e primitivo. Solamente nella riformulazione di Hilbert verranno introdotti degli assiomi per spiegare il movimento rigido.

Euclide utilizza però il termine uguale anche per indicare figure **equivalenti**, cioè **equiscomponibili** in figure tra esse congruenti. Una volta introdotta l'idea di misura, due figure sono equivalenti se hanno la stessa area. Questa ambiguità ha spinto ad utilizzare i due termini congruenti e equivalenti per distinguere le due situazioni, abolendo in sostanza dalla geometria il termine uguali.

Il concetto di equivalenza ha permesso di introdurre, nell'attuale formulazione algebrica, le varie formule per calcolare l'area dei poligoni. Ad esempio: un parallelogramma è equivalente ad un rettangolo con stessa base ed altezza (cioè tali rettangolo e parallelogramma sono costruibili con un certo numero di figure tra loro congruenti). Questo ha portato alla formula dell'area del parallelogramma: $\mathcal{A} = b \cdot h$. Analogamente per la formula dell'area del triangolo: un triangolo è equivalente ad un rettangolo con stessa altezza e base metà della base del triangolo, di conseguenza la formula dell'area di un triangolo è $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$.

I famosi teoremi di Pitagora e di Euclide nascono con una formulazione puramente basata sulla geometria e sull'equivalenza, mentre sono attualmente automaticamente tradotti in una formulazione algebrica. Il teorema di Pitagora, in particolare, è ampiamente studiato dal punto di vista algebrico con la ricerca di terne di numeri interi, detti *terne pitagoriche*, che soddisfano l'uguaglianza $a^2 + b^2 = c^2$; la generalizzazione di tale problema ha dato luce al famoso *Ultimo teorema di Fermat* di natura strettamente algebrica: *l'equazione* $a^n + b^n = c^n$ *non ammette soluzioni intere positive per* $n > 2$. Tale teorema, congetturato da Fermat (1601-1665), è stato dimostrato solo recentemente (Andrew Wiles, tra il 1993 e il 1998).

E per quanto riguarda la **similitudine**? Come si può definire in maniera corretta e formale la similitudine?

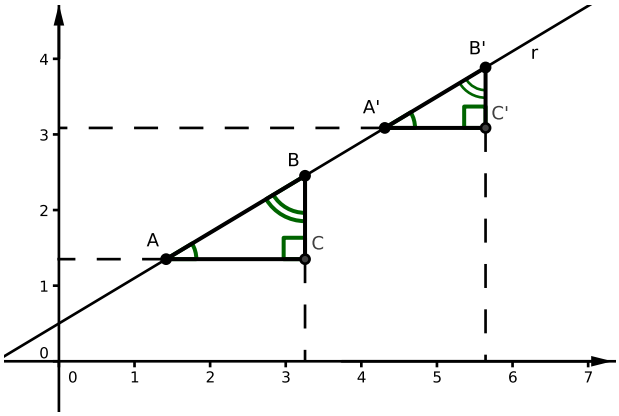
Coordinate

Intorno al 1630, Pierre de Fermat e René Descartes (Cartesio) scoprono, indipendentemente, i vantaggi dell'uso dei numeri nella geometria, introducendo il concetto di coordinate di un punto.

A quei tempi si pensava ancora che l'unica geometria fosse quella Euclidea: i numeri erano solo un aiuto nello studio delle figure geometriche (euclidee). Solo quando nel 1800 si svilupparono le geometrie non euclidee, si cominciò a ragionare in direzione opposta: punti, rette, lunghezze ecc. potevano essere definite mediante numeri per poi dimostrare che tali oggetti soddisfacevano i postulati della geometria euclidea. Questo è anche stato di aiuto per definire con il massimo rigore il concetto di movimento.

Introdotto nel piano un sistema di riferimento ortogonale e monometrico, è possibile associare ad ogni punto del piano una coppia di numeri nel modo noto: a un punto P associamo la coppia di numeri reali (x_P, y_P) tracciando per P le parallele alle due rette che formano il sistema di riferimento e considerando i punti H e K di intersezione tra le parallele tracciate e le rette del sistema di riferimento. A tali punti corrispondono due numeri x_P e y_P (coordinate di P) che, presi secondo un ordine fissato e convenzionale, danno la coppia numerica associata al punto P. Tale corrispondenza tra punti del piano e coppie di numeri è biunivoca per cui si tende a identificare i due oggetti. Notiamo che è anche possibile fissare sistemi di riferimento non ortogonali o non monometrici, ma non è in generale conveniente. Di seguito, riferndoci a sistema di riferimento intenderemo sistema ortogonale e monometrico.

Partendo dal punto di vista della geometria euclidea e grazie al teorema di Talete e alla similitudine dei triangoli, si può introdurre il concetto di coefficiente angolare di una retta. Fissato un sistema di riferimento nel piano e considerata una retta r non verticale, consideriamo su di essa due punti A e B.



Costruiamo quindi il triangolo rettangolo di ipotenusa AB e indichiamo con C il terzo vertice. Vogliamo dimostrare che il rapporto $\frac{BC}{AC}$ non dipende dalla scelta dei punti A e B su r. Infatti prendiamo altri due punti A' e B' su r e costruiamo il triangolo rettangolo $A'B'C'$ di ipotenusa $A'B'$. Grazie al teorema delle rette parallele tagliate de una trasversale, i triangoli ABC e $A'B'C'$ hanno gli angoli congruenti, quindi sono simili. Di conseguenza $BC : AC = B'C' : A'C'$, cioè $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$. Il fatto che tale quantità non dipenda dalla scelta dei punti significa che è una caratteristica intrinseca della retta r a cui si da il nome di **coefficiente angolare** di r e che è tradizionalmente indicato con la lettera m.

Lavorando in coordinate è poi necessario introdurre anche il concetto di segno: una retta può avere anche coefficiente angolare negativo, ma si può ovviare a questo problema considerando l'ordinamento di A e B su r. Notiamo inoltre che $\overline{BC} = |y_B - y_C| = |y_B - y_A|$ e $\overline{AC} = |x_C - x_A| = |x_B - x_A|$, quindi presi due punti A e B su una retta r di coefficiente angolare m si ottiene che $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. Per le rette verticali il coefficiente angolare non è definito.

Supponiamo ora che la retta r di coefficiente angolare m intersechi l'asse delle ordinate nel punto $Q(0, q)$. Consideriamo la relazione $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, valida per tutti i punti di r. In particolare se applichiamo tale relazione al generico punto $P(x, y)$ di r e a Q, otteniamo $\dfrac{y - q}{x} = m$, cioè

$$y = mx + q \qquad \text{con } m, q \in \mathbb{R}$$

Per opportuni m e q un'equazione di questo tipo è soddisfatta dalle coordinate dei punti di ogni retta. Se consideriamo inoltre le rette verticali, i cui punti soddisfano un'equazione del tipo $x = c$, otteniamo che ogni retta ha un'equazione della forma

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ costanti fissate e } (a, b) \neq (0, 0)$$

Notiamo che, fissata una retta, i coefficienti m e q sono univocamente determinati, mentre a, b, c possono variare a meno di un coefficiente di proprozionalità.

Dicendo che una retta, o una qualsiasi figura geometrica, ha una certa equazione, intendiamo dire che i suoi punti sono tutti e soli i punti le cui coordinate sono soluzione di quella equazione.

Invertendo il punto di vista, possiamo definire le rette come l'insieme delle coppie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfano un'equazione lineare $ax + by + c = 0$, con a e b non entrambi nulli, per poi verficare che tali oggetti soddisfano tutti i postulati sulle rette richiesti dalla geomatria euclidea. In questo modo, con l'uso dei numeri, le rette non devono essere considerate enti primitivi, ma vengono definite.

Per esempio il fatto che per due punti distinti passi una ed una sola retta deriva dal fatto che fissati due punti distinti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$, il sistema

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$

nelle incognite a, b, c ammette una sola soluzione (a meno di proporzionalità).

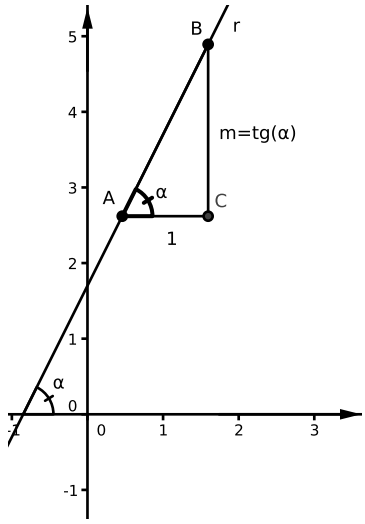
Analogamente si può utilizzare quanto suggerito dal teorema di Pitagora (N.B: preso come suggerimento) per definire la distanza tra due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

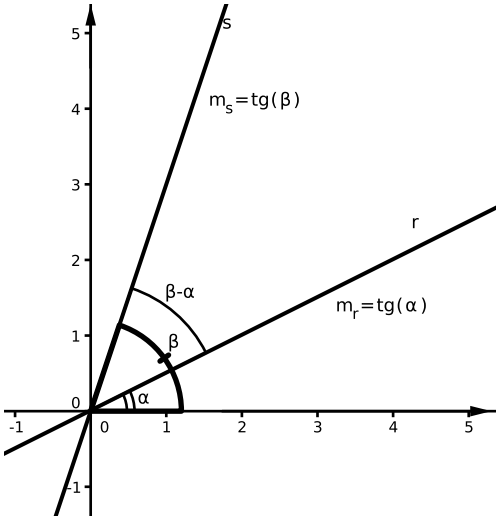
Se prendiamo questa come definizione, essa può poi essere utilizzata per dimostrare il teorema di Pitagora e gli altri teoremi relativi alle lunghezze. Inoltre, grazie a questa formula, si ottiene che l'equazione di una circonferenza di centro $C(x_C, y_C)$ e raggio r è

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

Anche per quanto riguarda lo studio degli angoli, l'uso delle coordinate fornisce un valido aiuto. Abbiamo già osservato che ogni retta non verticale ha equazione $y = mx + q$. Inoltre il coefficiente angolare m fornisce informazioni sull'angolo α che r forma con il semiasse positivo delle ascisse: sappiamo infatti che se $A(x, y)$ è un punto di r, allora lo è anche il punto $B(x + 1, y + m)$; cioè, muovendosi su r, ad ogni spostamento di una unità lungo l'asse delle ascisse corrisponde uno spostamento di m unità l'ungo l'asse delle ordinate. L'angolo α rimane in questo modo univocamente determinato. Più precisamente, con l'uso della trigonometria, si ha che $\text{tg}(\alpha) = m$.



Supponiamo ora di volere calcolare l'angolo compreso tra due rette non verticali. Naturalmente questo equivale a calcolare l'angolo tra le rispettive parallele passanti per l'origine, quindi possiamo supporre che le rette passino per l'origine.



Sia α l'angolo che r forma con il semiasse positivo delle ascisse, cioè $m_r = \mathrm{tg}(\alpha)$ e β l'angolo che s forma con il semiasse positivo delle ascisse, cioè $m_s = \mathrm{tg}(\beta)$. L'angolo tra r e s è $\beta - \alpha$. Se $\beta - \alpha$ non è un angolo retto possiamo usare le formule di duplicazione di seno e coseno (o direttamente quelle della tangente) per ottenere:

$$\mathrm{tg}(\beta-\alpha) = \frac{\sin(\beta)\cos(\alpha)-\cos(\beta)\sin(\alpha)}{\cos(\beta)\cos(\alpha)+\sin(\beta)\sin(\alpha)} = \frac{\dfrac{\sin(\beta)\cos(\alpha)-\cos(\beta)\sin(\alpha)}{\cos(\beta)\cos(\alpha)}}{\dfrac{\cos(\beta)\cos(\alpha)+\sin(\beta)\sin(\alpha)}{\cos(\beta)\cos(\alpha)}} = \frac{\mathrm{tg}(\beta)-\mathrm{tg}(\alpha)}{1+\mathrm{tg}(\beta)\mathrm{tg}(\alpha)}$$

$$= \frac{m_r - m_s}{1+m_r m_s}$$

Bisogna prestare un po' di attenzione ai segni perché in effetti gli angoli che formano le due rette r e s sono due angoli tra loro supplementari.

Costruzioni con riga e compasso con le coordinate

Dal punto di vista algebrico, le costruzioni con riga e compasso corrispondono a determinare le coordinate dei punti di intersezioni tra rette, tra rette e circonferenze e tra circonferenze.

Trovare i punti di intersezione tra due rette corrisponde a risolvere sistemi di equazioni lineari, cioè a risolvere equazioni mediante l'uso delle quattro operazioni: addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione.

Trovare i punti di intersezione tra una retta e una circonferenza o tra due circonferenze corrisponde a risolvere sistemi di equazioni di secondo grado, cioè a risolvere equazioni mediante l'uso delle quattro operazioni e dell'estrazione di radici quadrate.

Con queste osservazioni possiamo comprendere il

Criterio algebrico di costruibiltà (Cartesio) *Un punto del piano cartesiano* $\mathbb{R}^2$ *è costruibile con riga e compasso se e solo se le sue coordinate si possono ottenere da* 1 *mediante le operazioni* $+$, $-$, $\times$, $:$, $\sqrt{\ }$.

Ad esempio i punti $\left(\sqrt{2}, \sqrt{5}\right)$ o $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$ sono costruibili con riga e compasso, mentre non lo sono nè il punto $\left(\sqrt[3]{2}, 1\right)$ nè il punto $(\pi, 0)$

L'impossibilità di risolvere i problemi della **duplicazione del cubo**, della **trisezione dell'angolo** e della **quadratura del cerchio** mediante riga e compasso fu dimostrata solo nel 1800, utilizzando il criterio di Cartesio e l'algebra moderna (Galois e Abel).

CAPITOLO 2

Isometrie: definizioni

Una delle possibili critiche allo studio della geometria del piano mediante l'uso di coordinate e il modello di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è la particolarità del punto scelto come origine degli assi cartesiani. Per ovviare a questo problema si possono utilizzare delle trasformazioni che permettono di trasformare un qualsiasi punto del piano nell'origine e una retta qualsiasi nell'asse delle ascisse.

- Una **trasformazione** del piano è una funzione **biiettiva** f che ad ogni punto P del piano associa uno ed un solo punto $P' = f(P)$ del piano.
- Un' **isometria** è una trasformazione del piano che trasforma ogni coppia di punti A e B in punti $f(A)$ e $f(B)$ che hanno la medesima distanza:

  $$\mathrm{d}\,(f(A), f(B)) = \mathrm{d}\,(A, B) \qquad \text{ovvero} \qquad \overline{f(A)f(B)} = \overline{AB}, \qquad \forall A, B$$

  Le isometrie definiscono esattamente il **movimento rigido del piano**, utilizzato da Euclide senza fornirne una reale definizione.

Noi ci occuperemo solo di trasformazioni che mantengono l'allineamento, cioè che mandano rette in rette. Tali trasformazioni hanno la seguente proprietà.

Proprietà. *Ogni trasformazione che mantiene l'allineamento manda rette tra loro parallele in rette tra loro paralle. Cioè se r e s sono rette tra loro parallele: $r \parallel s$, e $r' = T(r)$, $s' = T(s)$, allora anche r' e s' sono tra loro parallele: $r' \parallel s'$.*

Questa proprietà è una diretta conseguenza della biiettività delle trasformazioni. Supponiamo infatti per assurdo che r' e s' non siano parallele e sia $P' = r' \cap s'$. Allora:

$$\begin{aligned} P' \in r' = T(r) \;&\Rightarrow\quad \text{esiste} \quad R \in r \quad \text{t.c.} \quad T(R) = P' \\ P' \in s' = T(s) \;&\Rightarrow\quad \text{esiste} \quad S \in s \quad \text{t.c.} \quad T(S) = P' \end{aligned}$$

Poiché per ipotesi r e s sono parallele i punti R e S sono distinti, quindi P' dovrebbe essere immagine di due punti differenti e questo è in contraddizione con il fatto che una trasformazione è una funzione biiettiva del piano in se stesso.

Le isometrie hanno le seguenti proprietà:

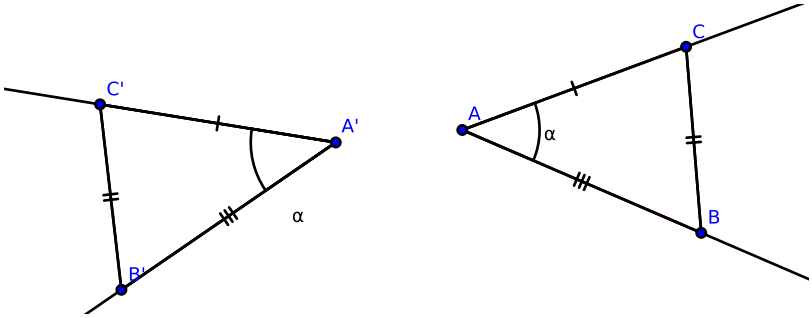
Proprietà. *Ogni isometria mantiene l'allineamento dei punti.*

Notiamo che tre punti A, B e C sono allineati se e solo se $AB + BC = AC$. Siano quindi A, B e C tre punti allineati e siano A', B' e C' le loro immagini. Allora $A'B' + B'C' = AB + BC = AC = A'C'$, quindi anche A', B' e C' sono allineati.

Proprietà. *Ogni isometria mantiene invariata l'ampiezza degli angoli.*

Questa proprietà è in sostanza una conseguenza del criterio LLL di congruenza dei triangoli. Dato infatti un angolo di vertice A e presi sui suoi lati due punti B e C, otteniamo un triangolo ABC. Effettuando una trasformazione isometrica, il triangolo ABC viene trasformato nel triangolo $A'B'C'$

congruente ad ABC per il criterio LLL. Di conseguenza l'angolo di vertice A viene trasformato in un angolo di vertice A', congruente ad $\widehat{A}$.

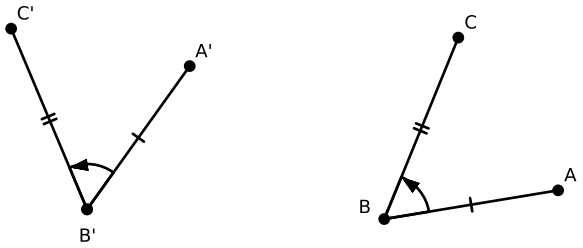


Inoltre vale il seguente importante teorema:

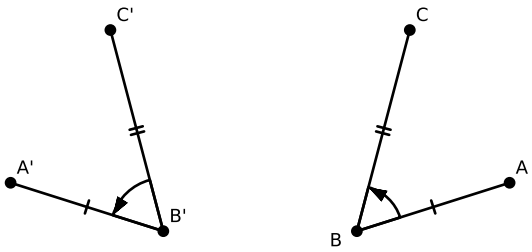
Teorema. *Ogni isometria f di $\mathbb{R}^2$ è determinata dalle immagini $f(A), f(B), f(C)$ di tre punti A, B, C non allineati.* Cioè ogni isometria è determinata dall'immagine di un triangolo.

Notiamo che tre punti non allineati, presi secondo un certo ordine, individuano in maniera unica un angolo orientato minore di un angolo piatto. Possiamo quindi distinguere due categorie di traformazioni.

- **Trasformazioni dirette**, ovvero che mantiengono l'orientamento degli angoli: ogni angolo $A\widehat{B}C$ antiorario viene mandato nel corrispondente angolo $A'\widehat{B'}C'$ ancora antiorario.



- **Trasformazioni inverse**, ovvero che invertono l'orientamento degli angoli: ogni angolo $A\widehat{B}C$ antiorario viene mandato nel corrispondente angolo $A'\widehat{B'}C'$ orario.



Qual é il problema se i punti sono allineati?

In una trasformazione f si chiamano

- **punti fissi** o **punti uniti** di f i punti che vengono trasformati in se stessi: $P' = f(P) = P$;
- **rette fisse** di f le rette che vengono trasformate in se stesse: $r' = f(r) = r$. Dicendo che la retta r è una retta di punti fissi, intendiamo che ogni punto di r è un punto fisso, si tratta quindi di una condizione più forte che essere una retta fissa dove ogni punto può essere trasformato in un altro punto della medesiama retta.

Esistono quattro tipi di isometrie del piano, significativamente differenti: traslazioni, rotazioni, riflessioni e glissoriflessioni. Vediamo la definizione e le caratteristiche di ognuna.

TRASLAZIONE. Una traslazione muove ogni punto P del piano in un punto P' ad una distanza e in una direzione fissata, ovvero di un vettore fissato. Ogni traslazione è quindi determinata da due costanti $a, b \in \mathbb{R}$, ovvero da un vettore $\overrightarrow{v} = (a, b)$.

Notiamo che se $(a, b) = (0, 0)$ otteniamo la trasformazione identica, mentre le caratteristiche di una traslazione, differente dalla trasformazione identica, sono:

- si tratta di una trasformazione diretta,
- non esistono punti fissi,
- esistono infinite rette fisse (tutte le rette parallele alla direzione della traslazione).

ROTAZIONE. Chiamiamo rotazione del piano attorno ad un punto C di un angolo β, con $0 \leq \beta < 2\pi$, la trasformazione che manda ogni punto P del piano nel punto P' tale che: $\overline{CP} = \overline{CP'}$ e $P\widehat{C}P' = \beta$.

Se $\beta = 0$ si ha la trasformazione identica, altrimenti le caratteristiche di una rotazione sono:

- si tratta di una trasformazione diretta,
- ha un solo punto fisso, quello attorno al quale avviene la rotazione,
- non ha nessuna retta fissa, tranne nel caso di una rotazione pari ad un angolo piatto; in tale caso, infatti, tutte le rette passanti per il centro di rotazione sono fisse. Notiamo che una rotazione di un angolo piatto corrisponde ad una simmetria centrale rispetto al centro di rotazione.

La composizione di una rotazione con una traslazione è ancora una rotazione rispetto ad un differente punto.

RIFLESSIONE O SIMMETRIA ASSIALE. La riflessione rispetto ad una retta r è una trasformazione che manda ogni punto P nel punto P' tale che il segmento PP' è perpendicolare a r e il punto medio di PP' appartiene a r (cioè r è asse di PP').

Una riflessione ha le seguenti caratteristiche:

- si tratta di una trasformazione inversa,
- ha una retta di punti fissi (la retta r rispetto alla quale si effettua la riflessione, detto asse di simmetria),
- ha infinite rette fisse (tutte le rette ortogonali a r).

GLISSORIFLESSIONE O GLISSOSIMMETRIA. Una glissoriflessione si ottiene effettuando una riflessione rispetto ad una retta r, seguita da una traslazione di un vettore $\overrightarrow{v}$ parallelo a r.

Una glissoriflessione ha le seguenti caratteristiche:

- è una trasformazione inversa,
- non ha punti fissi,
- ha una sola retta fissa (la retta r)

Componendo riflessioni e traslazioni si ha la seguente suituazione:

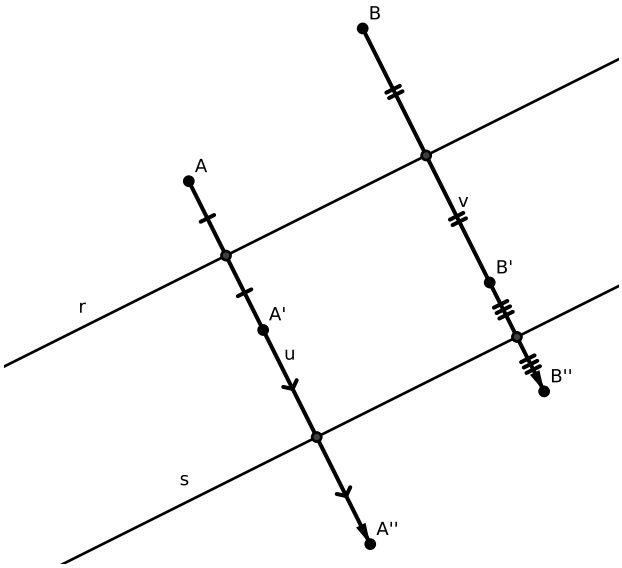
- La composizione di una riflessione rispetto a r e di una traslazione nella direzione ortogonale a r è ancora una riflessione
- la composizione di una riflessione rispetto a r e di una traslazione in una direzione non ortogonale nè parallela a r è ancora una glissoriflessione rispetto a un'altra retta.

Esiste un importante teorema che permette di determinare tutte le isometrie del piano.

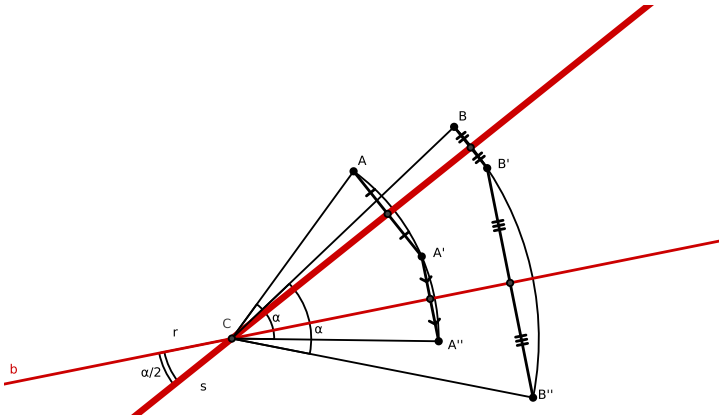
Teorema delle tre riflessioni. *Ogni isometria del piano è la composizione di una, due o tre riflessioni.*

Inoltre:

- Se l'isometria è composizione di **due** riflessioni rispetto a rette parallele, allora si tratta di una traslazione (di direzione perpendicolare alle rette e distanza uguale al doppio della distanza delle due rette)



- Se l'isometria è composizione di **due** riflessioni rispetto a rette incidenti in un punto C, allora si tratta di una rotazione di centro C. L'angolo di rotazione è il doppio dell'angolo formato da r e s.



- Se l'isometria è composizione di **tre** riflessioni rispetto a tre rette non tutte parallele, allora si tratta di una glissoriflessione.
- Se l'isometria è composizione di **tre** riflessioni rispetto a tre rette parallele, allora si tratta ancora di una riflessione.

Non abbiamo parlato in questa sezione delle **simmetrie centrali**. Una simmetria centrale rispetto ad un punto C è la trasformazione che associa ad ogni punto P il punto P' distinto da P appartenente alla retta CP e tale che $\overline{CP} = \overline{CP'}$. Tali trasformazioni hanno infinite rette fisse (tutte quelle passanti per C) e C è il solo punto fisso. Esse corrispondono ad una rotazione di centro C di un angolo pari ad un angolo piatto e sono ottenute dalla composizione di due riflessioni rispetto a rette ortogonali.

CAPITOLO 3

Isometrie: punto di vista geometrico

Abbiamo visto che una trasformazione T è univocamente determinata dall'immagine $T(A) = A'$, $T(B) = B'$ e $T(D) = D'$ di tre punti A, B e C non allineati .

Come si può individuare un'isometria e le sue caratteristiche nota l'immagine di tre punti non allineati?

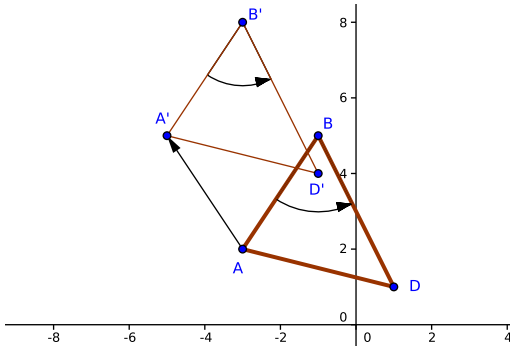
Innanzitutto è immediato verificare se si tratta di un'isometria diretta o inversa, quindi si procede per esclusione; infatti, la traslazione e la riflessione sono facilmente riconoscibili.

- Se si tratta di un'isometria diretta diversa da una traslazione, necessariamente è una rotazione.
- Se si tratta di un'isometria inversa diversa da una riflessione, necessariamente è una glissoriflessione.

Vediamo con degli esempi come determinare le caratteristiche delle differenti isometrie.

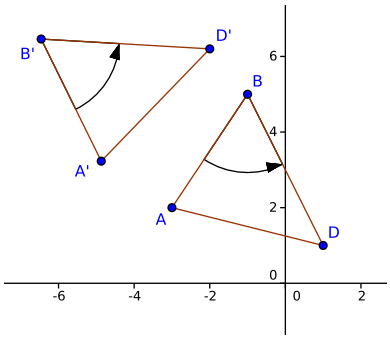
Consideriamo i punti $A = (-3, 2)$, $B = (-1, 5)$ e $D = (1; 1)$ e consiederiamo le seguenti trasformazioni:

- TRASLAZIONE. Siano $A' = (-5; 5)$, $B' = (-3; 8), D' = (-1; 4)$:



Evidentemente si tratta di una trasformazione diretta ed in particolare di una traslazione. Il vettore che caratterizza la traslazione è, per esempio, il vettore $AA' = (-2, 3)$.

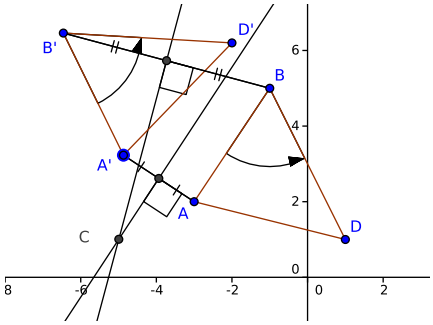
- ROTAZIONE. Siano $A' = (-4, 87; 3, 23)$, $B' = (-6, 46; 6, 46), D' = (-2; 6, 2)$:



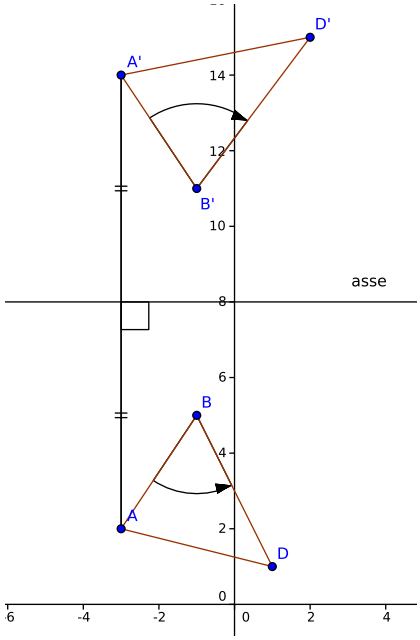
Si tratta di una trasformazione diretta che non è una traslazione, quindi si tratta di una rotazione.

Come si possono trovare centro e quindi angolo di rotazione? Notiamo che se $A' = T(A)$ è ottenuto mediante una rotazione di centro C, allora in particolare $AC = A'C$, ovvero C

appartiene all'asse del segmento AA'. Analogamente se $B' = T(B)$, allora $CB = CB'$ e C appartiene all'asse di BB'. Quindi il centro di rotazione C può essere trovato come il punto di intersezione tra gli assi di AA' e BB'; a questo punto l'angolo di rotazione è semplicemente l'angolo $\widehat{ACA'}$.

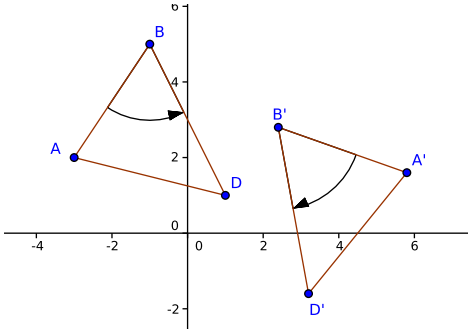


- RIFLESSIONE. Siano $A' = (-3; 14),\ B' = (-1; 11), D' = (2; 15)$:



Si tratta di una trasformazione inversa ed in particolare di una riflessione. L'asse di simmetria è, per esempio, l'asse del segmento AA'.

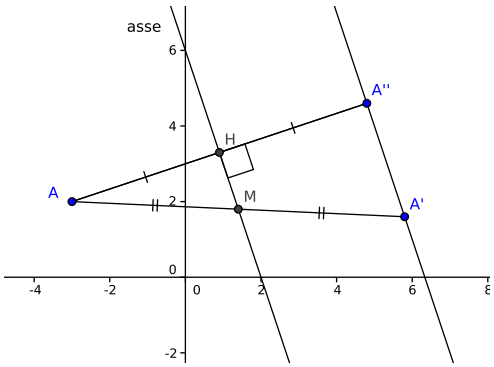
- GLISSORIFLESSIONE. Siano $A' = (5,8; 1,6),\ B' = (2,4; 2,8), D' = (3,2; -1,6)$:



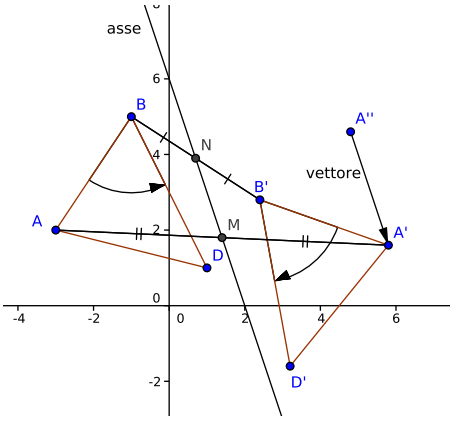
Si tratta di una trasformazione inversa che non è una riflessione, quindi si tratta di una glissoriflessione.

Come si possono trovare l'asse di simmetria e quindi il vettore di traslazione? È sufficiente osservare che, per Talete, l'asse di simmetria divide il segmento AA' in due parti congruenti, quindi il punto medio M di AA' appartiene all'asse. Sia infatti M il punto di intersezione tra

la retta AA' e l'asse di simmetria della glissoriflessione e sia A'' il simmetrico di A rispetto all'asse. La retta $A''A'$ è parallela all'asse, quindi, per Talete, $\frac{AM}{MA'} = \frac{AH}{HA''} = 1$; quindi $AM = MA'$, ovvero M è il punto medio del segmento AA'.



Anaolgamente il punto medio N di BB' appartiene all'asse e l'asse è la retta MN. Individuato l'asse a di simmetria è sufficiente determinare il punto A'', ottenuto da A tramite una simmetria rispetto ad a e quindi individuare il vettore $A''A'$ della traslazione.



CAPITOLO 4

Isometrie: lavorando con le coordinate

Ricordiamo che:

- Una **trasformazione** del piano è una funzione **biiettiva** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che ad ogni punto $P(x; y)$ del piano associa uno ed un solo punto $P' = f(P) = (x'; y')$ del piano.
- Un' **isometria** è una trasformazione del piano che trasforma ogni coppia di punti A e B in punti $f(A)$ e $f(B)$ che hanno la medesima distanza:

$$\mathrm{d}\,(f(A), f(B)) = \mathrm{d}\,(A, B) \qquad \text{ovvero} \qquad \overline{f(A)f(B)} = \overline{AB}, \qquad \forall A, B$$

Inoltre possiamo quindi distinguere due categorie di traformazioni del piano

- **Trasformazioni dirette**, ovvero che mantiengono l'orientamento degli angoli.
- **Trasformazioni inverse**, ovvero che invertono l'orientamento degli angoli.

In una trasformazione f si chiamano

- **punti fissi** o **punti uniti** di f i punti che vengono trasformati in se stessi: $P' = f(P) = P$;
- **rette fisse** di f le rette che vengono trasformate in se stesse: $r' = f(r) = r$. Dicendo che la retta r è una retta di punti fissi, intendiamo che ogni punto di r è un punto fisso, si tratta quindi di una condizione più forte che essere una retta fissa dove ogni punto può essere trasformato in un altro punto della medesiama retta.

Analizziamo le quattro isometrie, considerando in particolare cosa avviene per le coordiante dei punti.

TRASLAZIONE. Una traslazione muove ogni punto P del piano in un punto P' ad una distanza e in una direzione fissata, ovvero di un vettore fissato. Ogni traslazione è quindi determinata da due costanti $a, b \in \mathbb{R}$, ovvero da un vettore $\overrightarrow{v} = (a, b)$. Nel piano cartesiano una traslazione ha quindi equazioni:

$$t_{a,b}(x, y) = (x + a, y + b) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

È facile verificare che si tratta effettivamente di una isometria: se $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ sono due qualsiasi punti, allora

$$\overline{t_{a,b}(P_1)t_{a,b}(P_2)} = \sqrt{(x_2 + a - x_1 - a)^2 + (y_2 + b - y_1 - b)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \overline{P_1P_2}$$

Notiamo che se $(a, b) = (0, 0)$ otteniamo la trasformazione identica, mentre le caratteristiche di una traslazione, differente dalla trasformazione identica, sono:

- si tratta di una trasformazione diretta,
- non esistono punti fissi,
- esistono infinite rette fisse (tutte le rette parallele alla direzione della traslazione).

ROTAZIONE. Chiamiamo rotazione del piano attorno all'origine O di un angolo β la trasformazione che manda ogni punto P del piano nel punto P' tale che: $\overline{OP} = \overline{OP'}$ e $P\widehat{O}P' = \beta$. Nel piano cartesiano ogni rotazione attorno all'**origine** ha equazioni del tipo

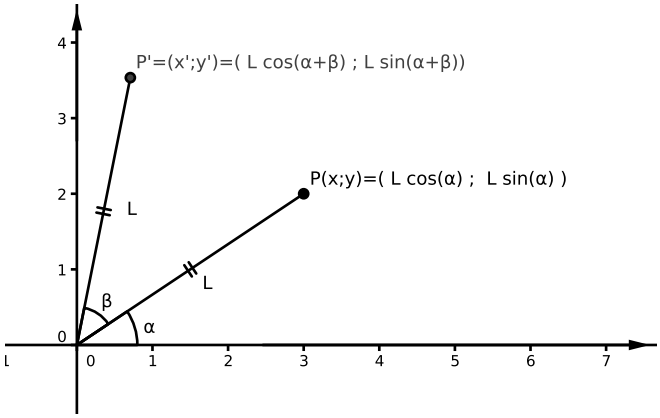
$$r_{c,s}(x,y) = (cx - sy, sx + cy) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x' = cx - sy \\ y' = sx + cy \end{cases} \qquad c, s \in \mathbb{R}, \quad c^2 + s^2 = 1$$

Notiamo che la condizione $c^2 + s^2 = 1$ assicura che il sistema

$$\begin{cases} \cos(\beta) = c \\ \sin(\beta) = s \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $0 \leq \beta < 2\pi$.

Verifichiamo che una rotazione in senso antiorario di un angolo β corrisponde esattamente ad una trasformazione del tipo $r_{c,s}$. Consideriamo la rotazione di un angolo β che manda P in P'. Indichiamo $\overline{OP} = \overline{OP'} = l$ e con α l'angolo formato da OP con il semiasse positivo delle ascisse.



Notiamo che se $P = (x, y)$, si ha $x = l\cos(\alpha)$ e $y = l\sin(\alpha)$; analogamente se $P' = (x', y')$, si ha $x' = l\cos(\alpha + \beta)$ e $y' = l\sin(\alpha + \beta)$. Indicato $c = \cos(\beta)$ e $s = \sin(\beta)$, otteniamo:

$$\begin{cases} x' = l\cos(\alpha+\beta) = l\left[\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\right] = l\cos(\alpha)c - l\sin(\alpha)s = cx - sy \\ y' = l\sin(\alpha+\beta) = l\left[\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\right] = l\sin(\alpha)c + l\cos(\alpha)s = sx + cy \end{cases}$$

Componendo rotazioni attorno all'origine con traslazioni si possono ottenere rotazioni attorno ad un qualsiasi punto.

Come nel caso delle rotazioni è immediato verificare che si tratta di un'isometria.

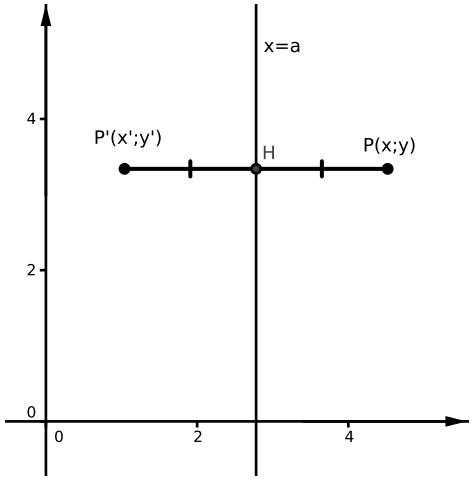
Notiamo che le caratteristiche di una rotazione sono:

- si tratta di una trasformazione diretta,
- ha un solo punto fisso, quello attorno al quale avviene la rotazione,
- non ha nessuna retta fissa, tranne nel caso di una rotazione pari ad un angolo piatto; in tale caso, infatti, tutte le rette passanti per il centro di rotazione sono fisse. Notiamo che una rotazione di un angolo piatto corrisponde ad una simmetria centrale rispetto al centro di rotazione. In particolare la rotazione attorno all'origine di un angolo piatto è la simmetria centrale rispetto all'origine, ovvero la trasformazione $(x', y') = (-x, -y)$.

La composizione di una rotazione con una traslazione è ancora una rotazione rispetto ad un differente punto.

RIFLESSIONE O SIMMETRIA ASSIALE. La riflessione rispetto ad una retta r è una trasformazione che manda ogni punto P nel punto P' tale che il segmento PP' è perpendicolare a r e il punto medio di PP' appartiene a r.

Ricaviamo le equazioni delle riflessioni rispetto a rette particolari.
Nel piano cartesiano una riflessione rispetto ad una retta verticale si ottiene nel seguente modo:



Il punto P viene mandato in un punto P' con la stessa ordinata, mentre l'ascissa si può ricavare dal fatto che H è il punto medio del segmento PP', ovvero $a = \dfrac{x + x'}{2}$ e $x' = 2a - x$. Di conseguenza le equazioni della simmetria rispetto ad una retta verticale di equazione $x = a$ sono:

$$h_{x=a}(x, y) = (2a - x, y) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$$

È immediato verificare che si tratta di un'isometria. Nel caso particolare della simmetria rispetto all'asse delle ordinate, di equazione $x = 0$, la simmetria ha equazioni:

$$h_{x=0}(x, y) = (-x, y) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

In maniera analoga si ricavano le equazioni di una simmetria rispetto ad una retta orizzontale $y = b$:

$$h_{y=b}(x, y) = (x, 2b - y) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$

Nel caso particolare della simmetria rispetto all'asse delle ascisse, di equazione $y = 0$, la simmetria ha equazioni:

$$h_{y=0}(x, y) = (x, -y) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

La riflessione h_r rispetto ad una qualsiasi retta r si ottiene combinando rotazioni e riflessioni rispetto a rette orizzontali o verticali. Si tratta infatti di trasformare, mediante una rotazione, la retta r in una retta r' verticale (o orizzontale) e di effettuare la riflessione $h_{r'}$. Procedendo a ritroso e effettuando la rotazione inversa si ottiene la riflessione rispetto a r.

Una riflessione ha le seguenti caratteristiche:

- si tratta di una trasformazione inversa,
- ha una retta di punti fissi (la retta r rispetto alla quale si effettua la riflessione),
- ha infinite rette fisse (tutte le rette ortogonali a r).

In particolare la riflessione rispetto alla retta $y = x$ è la trasformazione che scambia le due componenti: $(x', y') = (y, x)$. In questo caso, partendo dal grafico di una funzione $f(x)$ invertibile, si ottiene il grafico della funzione inversa $f^{-1}(x)$.

GLISSORIFLESSIONE O GLISSOSIMMETRIA. Una glissoriflessione si ottiene effettuando una riflessione rispetto ad una retta r, seguita da una traslazione di un vettore $\overrightarrow{v}$ parallelo a r.

Una glissoriflessione ha le seguenti caratteristiche:

- è una trasformazione inversa,
- non ha punti fissi,
- ha una sola retta fissa (la retta r)

Possiamo generalizzare quanto ottenuto in alcuni casi particolari nel seguente modo. In generale un'isometria è una trasformazione di uno dei due seguenti tipi:

TRASFORMAZIONE DIRETTA, ovvero che mantiene l'orientamento degli angoli. Le trasformazioni dirette sono **rotazioni** o **traslazioni**, cioè la composizione di due riflessioni.

Nel piano cartesiano ogni trasformazione diretta ha equazioni del tipo:

Trasformazione diretta: rotazione o traslazione. $\begin{cases} x' = cx - sy + a \\ y' = sx + cy + b \end{cases}$ con $c^2 + s^2 = 1$

In particolare:

- si tratta di una traslazione se e solo se $c = 1$ e $s = 0$,
- se $(c, s) \neq (1, 0)$ si tratta di una rotazione.

  La rotazione è attorno all'origine se e solo se $a = b = 0$. In caso contrario per trovare il centro di rotazione basta tenere conto del fatto che il centro di rotazione è l'unico punto unito della trasformazione, ovvero un punto P tale che $P' = P$. Utilizzando le coordinate questa condizione si traduce nel sistema

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = cx - sy + a \\ y = sx + cy + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-c)x + sy = a \\ sx - (1-c)y = -b \end{cases}$$

  Risolvendo tale sistema, nelle incognite x e y si ottengono le coordiante del centro di rotazione.

Ad ogni trasformazione diretta possiamo associare la seguente matrice dei coefficienti:

Trasformazione diretta: rotazione o traslazione. $M = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M) = c^2 + s^2 = 1$

TRASFORMAZIONE INVERSA, ovvero che inverte l'orientamento degli angoli. Le trasformazioni inverse sono **riflessioni** o **glissoriflessioni** , cioè la composizione di una o tre riflessioni.

Nel piano cartesiano ogni trasformazione inversa ha equazioni del tipo:

Trasformazione inversa: riflessione o glissoriflessione. $\begin{cases} x' = cx + sy + a \\ y' = sx - cy + b \end{cases}$ con $c^2 + s^2 = 1$

In questo caso, per distinguere le riflessioni dalle glissoriflessioni è necessaria la ricerca dei punti fissi:

- le riflessioni hanno infiniti punti fissi (tutti i punti dell'asse di simmetria),
- le glissoriflessioni non hanno punti fissi.

A tale scopo, come nel caso della ricerca del centro di rotazione, si risolve il sistema

$$\begin{cases} x = cx + sy + a \\ y = sx - cy + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-c)x - sy = a \\ sx - (1+c)y = -b \end{cases}$$

Se il sistema ammette infinite soluzioni si tratta di una riflessione (le soluzioni sono i punti dell'asse di riflessione); se il sistema non ammette soluzioni si tratta di una glissoriflessione.

Ad ogni trasformazione inversa possiamo associare la seguente matrice dei coefficienti:

Trasformaz. inversa: riflessione o glissoriflessione. $M = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M) = -c^2 - s^2 = -1$

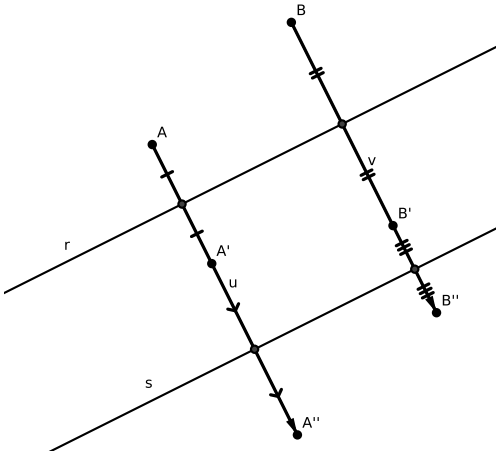
Facciamo alcune osservazioni sulla composizione di isometrie.
Componendo riflessioni e traslazioni si ha la seguente situazione:

- La composizione di una riflessione rispetto a r e di una traslazione nella direzione ortogonale a r è ancora una riflessione
- la composizione di una riflessione rispetto a r e di una traslazione in una direzione non ortogonale nè parallela a r è ancora una glissoriflessione rispetto a un'altra retta.

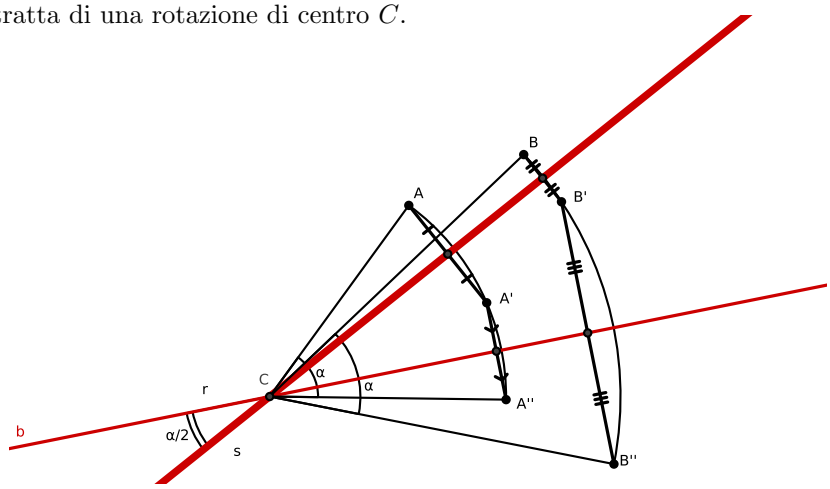
Esiste un importante teorema che permette di determinare tutte le isometrie del piano.

Teorema delle tre riflessioni. *Ogni isometria del piano è la composizione di una, due o tre riflessioni.*
Inoltre:

- Se l'isometria è composizione di **due** riflessioni rispetto a rette parallele, allora si tratta di una traslazione (di direzione perpendicolare alle rette e distanza uguale al doppio della distanza delle due rette)



- Se l'isometria è composizione di **due** riflessioni rispetto a rette incidenti in un punto C, allora si tratta di una rotazione di centro C.



- Se l'isometria è composizione di **tre** riflessioni rispetto a tre rette non tutte parallele, allora si tratta di una glissoriflessione.
- Se l'isometria è composizione di **tre** riflessioni rispetto a tre rette parallele, allora si tratta ancora di una riflessione.

CAPITOLO 5

Alcuni approfondimenti

Sappiamo che ogni riflessione ha equazioni

$$\begin{cases} x' = cx + sy + a \\ y' = sx - cy + b \end{cases} \qquad \text{con } s^2 + c^2 = 1$$

La condizione $s^2 + c^2 = 1$ implica l'esistenza di un unico angolo β, con $0 \leq \beta < 2\pi$, tale che

$$\boxed{\begin{cases} s = \sin(\beta) \\ c = \cos(\beta) \end{cases}}$$

Sotto quali condizioni otteniamo una riflessione?

Cominciamo con alcune osservazioni sul caso $c = 1$ e quindi $s = 0$ e $\beta = 0$. In tale caso si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = -y + b \end{cases}$$

Per verificare che si tratta una riflessione e ricercare l'asse di simmetria, procediamo con la ricerca dei punti fissi, ottenendo:

$$\begin{cases} x = x + a \\ y = -y + b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ y = \frac{b}{2} \end{cases}$$

La trasformazione ha infiniti punti fissi ed è quindi una riflessione se e solo se $a = 0$:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + b \end{cases}$$

In tale caso l'asse di simmetria è la retta orizzontale $y = \dfrac{b}{2}$.

Procediamo ora escludendo il caso $c = 1$ e quindi $s = 0$.

Cominciamo innanzitutto a stabilire le condizioni affinchè si tratti effettivamente di una riflessione e non di una glissoriflessione. Una riflessione ha infiniti punti fissi: tutti i punti dell'asse di simmetria. Di conseguenza il sistema

$$\begin{cases} x = cx + sy + a \\ y = sx - cy + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-c)x - sy = a \\ sx - (c+1)y = -b \end{cases}$$

deve avere infinite soluzioni. Moltiplicando la prima equazione per $-s$ e la seconda per $1 - c$, entrambi non nulli, e sommando le due equazioni otteniamo

$$\begin{cases} -s(1-c)x + s^2 y = -as \\ s(1-c)x - (1-c^2)y = -b(1-c) \end{cases} \Rightarrow (s^2 + c^2 - 1)y = -as + b(c-1)$$

Ricordando inoltre che $s^2 + c^2 = 1$, otteniamo l'equazione, nell'incognita y, $as - b(c-1) = 0$. Tale equazione dipende dai valori dei parametri a, b, c e s:

- Se $b \neq \dfrac{as}{c-1}$, l'equazione risulta impossibile, quindi non esistono punti fissi e la trasformazione è una glissoriflessione.

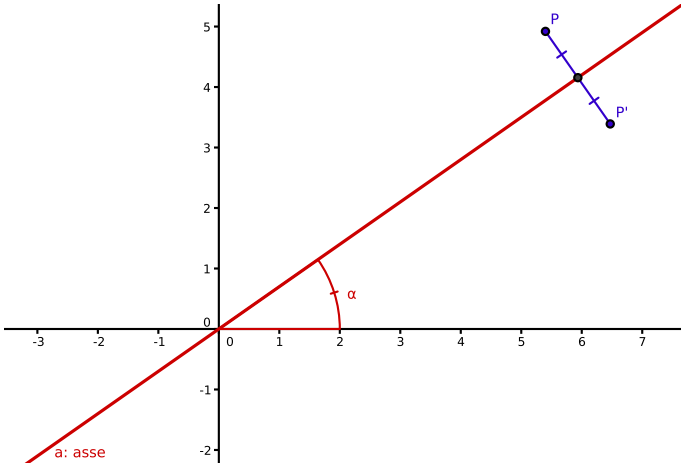
- Se $b = \dfrac{as}{c-1}$, l'equazione risulta indeterminata, quindi esistono infiniti punti fissi e la trasformazione è una riflessione.

Qual è il significato dei coefficienti c e s della riflessione?

Analizziamo ora il significato dell'angolo β sottinteso nelle equazioni della riflessione. La domanda che ci poniamo è:

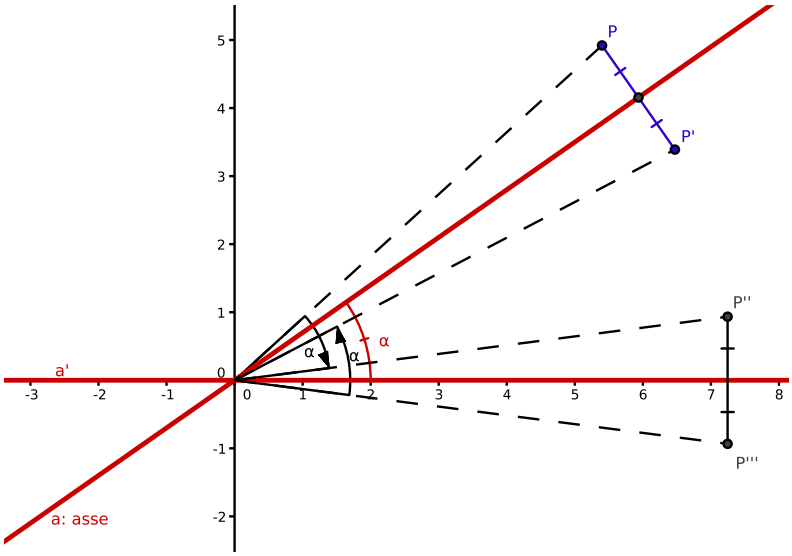
Che relazione c'è tra l'angolo β e l'asse di simmetria?

Supponiamo per semplicità che l'asse di simmetria passi per l'origine e sia α l'angolo che esso forma con il semiasse positivo delle ascisse.



Cerchiamo di trovare le equazioni della riflessione rispetto all'asse a, capendo così il significato dei coefficienti che le formano. Siccome sappiamo calcolare la riflessione rispetto all'asse delle ascisse senza l'uso di particolari formule, possiamo procedere nel seguente modo:

(1) Effettuiamo una rotazione antioraria di un angolo α e di centro l'origine. In questo modo l'asse di simmetria a viene trasformato nell'asse delle ascisse, e il generico punto P viene mandato in un punto P'' di cui sappiamo calcolare le coordinate.
(2) Effettuiamo la riflessione rispetto all'asse delle ascisse. In questo modo il punto P'' viene mandato in un punto P'''.
(3) Effettuiamo una rotazione oraria di un angolo α e di centro l'origine. In questo modo l'asse, lasciato invariato dalla riflessione, viene ritrasformato nell'asse a originale e P''' viene mandato nel punto P', corrispondente a P tramite la riflessione di asse a.



Sia quindi $P(x;y)$ il generico punto del piano e vediamo come vengono trasformate le sue coordinate tramite i tre passaggi descritti sopra.

(1) Notiamo che una rotazione antioraria di un angolo α, corrisponde ad una rotazione di angolo $-\alpha$. Quindi il generico punto $P(x;y)$ viene mandato nel punto $P''(x'';y'')$ definito dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'' = \cos(-\alpha)x - \sin(-\alpha)y \\ y'' = \sin(-\alpha)x + \cos(-\alpha)y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = \cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y \\ y'' = -\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y \end{cases}$$

(2) Procediamo ora con la riflessione rispetto all'asse delle ascisse. Le coordinate del punto $P'''(x''';y''')$, corrispondente a P'' sono date da:

$$\begin{cases} x''' = x'' \\ y''' = -y'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''' = \cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y \\ y''' = \sin(\alpha)x - \cos(\alpha)y \end{cases}$$

(3) Infine effettuiamo una rotazione oraria di angolo α per cui il punto P''' viene mandato nel punto $P'(x';y')$ definito dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = \cos(\alpha)x''' - \sin(\alpha)y''' \\ y' = \sin(\alpha)x''' + \cos(\alpha)y''' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \cos(\alpha)\left[\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y\right] - \sin(\alpha)\left[\sin(\alpha)x - \cos(\alpha)y\right] \\ y' = \sin(\alpha)\left[\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y\right] + \cos(\alpha)\left[\sin(\alpha)x - \cos(\alpha)y\right] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \cos^2(\alpha)x + \sin(\alpha)\cos(\alpha)y - \sin^2(\alpha)x + \sin(\alpha)\cos(\alpha)y \\ y' = \sin(\alpha)\cos(\alpha)x + \sin^2(\alpha)y + \sin(\alpha)\cos(\alpha)x - \cos^2(\alpha)y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \left(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\right)x + 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)y \\ y' = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)x - \left(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\right)y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \cos(2\alpha)x + \sin(2\alpha)y \\ y' = \sin(2\alpha)x - \cos(2\alpha)y \end{cases}$$

Di conseguenza la generica riflessione rispetto ad un asse passante per l'origine ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = \cos(2\alpha)\,x + \sin(2\alpha)\,y \\ y' = \sin(2\alpha)\,x - \cos(2\alpha)\,y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = cx + sy \\ y' = sx - cy \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} c = \cos(2\alpha) \\ s = \sin(2\alpha) \end{cases}$$

Quindi l'angolo β sottinteso nelle equazioni di una riflessione

$$\begin{cases} x' = cx + sy + a \\ y' = sx - cy + b \end{cases} \quad \text{con } c^2 + s^2 = 1, \text{ quindi con } \begin{cases} c = \cos(\beta) \\ s = \sin(\beta) \end{cases}$$

è in relazione con l'angolo α che l'asse di simmetria forma con il semiasse positivo dell'asse delle ascisse tramite la regola

$$\boxed{\beta = 2\alpha}$$

CAPITOLO 6

Affinità

Facciamo un passo indietro rispetto ai capitoli precedenti. Abbiamo detto che una **trasformazione** del piano è una funzione biiettiva $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che ad ogni punto P del piano associa uno ed un solo punto $P' = f(P)$ del piano. Anche la trasformazione banale $f(P) = P$ è una trasformazione del piano detta trasformazione identica e indicata con Id. Così come per le note funzioni reali è possibile effettuare la **composizione** di trasformazioni: date due trasformazioni f e g del piano, la funzione $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che associa ad ogni punto P il punto $f(g(P))$ è ancora una trasformazione del piano, in quanto biiettiva. Notiamo che in generale la composizione di funzioni non è commutativa: $f \circ g \neq g \circ f$ (così come non lo è in generale la composizione di funzioni). L'insieme $\mathcal{T}$ delle trasformazini del piano con la composizione possiede la struttura di gruppo (non commutativo):

- Se f e g sono due trasformazioni del piano, anche la loro composizione $f \circ g$ è una trasformazione del piano.
- Esiste l'elemento neutro $Id \in \mathcal{T}$ tale che $f \circ Id = Id \circ f = f \quad \forall f \in \mathcal{T}$,
- Esiste l'inverso di ogni elemento: per ogni $f \in \mathcal{T}$ esiste $f^{-1} \in \mathcal{T}$ tale che $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$.
- La composizione è associativa: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \quad \forall f, g, h \in \mathcal{T}$,

Tra tutte le trasformazioni del piano ci interesseremo solo delle **affinità** o trasformazioni lineari o trasformazioni affini. Tali trasformazioni hanno le seguenti proprietà

Proprietà. Un'affinità è una trasformazione del piano che mantiene l'allineamento dei punti e il parallelismo.

Da un punto di vista algebrico-analitico, possiamo così analizzare le trasformazioni. A ogni punto P del piano possiamo associare le sue coordinate $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; una trasformazione f del piano è definita quando conosciamo la regola che, date le coordinate (x, y) di un punto P, ci permette di determinare in maniera biiunivoca la sue coordinate (x', y') dell'immagine $P' = f(P)$. Si può dimostrare che ogni affinità ha, dal punto di vista delle coordinate, equazioni:

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + a \\ y' = \gamma x + \delta y + b \end{cases} \qquad \text{con la matrice} \quad M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

non degenere, ossia $\det(M) = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. In maniera intuitiva: il fatto che le affinità siano caratterizzate da equazioni lineari (di primo grado) deriva dal fatto che si tratta di trasformazioni che mandano rette in rette. La condizione sulla matrice M, invece, è legata alla biiettività: perché la trasformazione sia biiettiva è necessario che ogni punto (x', y') sia immagine di uno ed un solo punto (x, y); dal punto di vista dell'analisi questo significa che, assegnati x' e y' il sistema

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + a \\ y' = \gamma x + \delta y + b \end{cases}$$

deve sempre ammettere un'unica soluzione (x, y). Moltiplicando la prima equazione per γ e la seconda per $-\alpha$ e sommandole otteniamo

$$\gamma x' - \alpha y' = (\gamma\beta - \alpha\delta)y + \gamma a - \alpha b \quad \Rightarrow \quad (\alpha\delta - \beta\gamma)y = \alpha y' - \alpha x' + \gamma a - \alpha b \quad \Rightarrow$$
$$y = \frac{\gamma y' - \alpha x' + \gamma a - \alpha b}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

dove l'ultimo passaggio è lecito se e solo se $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Analogamente, moltiplicando la prima equazione per δ e la seconda per $-\beta$ e sommandole otteniamo

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)x = \delta x' - \beta y' - \delta a + \beta b \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\delta x' - \beta y' - \delta a + \beta b}{\alpha\delta - \beta\gamma}$$

dove l'ultimo passaggio è lecito se e solo se $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Di conseguenza il sistema nelle incognite x e y ha soluzione, cioè la trasformazione è invertibile, se e solo se $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Per le affinità vale lo stesso teorema enunciato per le isometrie:

Teorema. *Ogni affinità f di $\mathbb{R}^2$ è determinata dalle immagini $f(A), f(B), f(C)$ di tre punti A, B, C non allineati.*

Le **similitudini** o **dilatazioni** sono particolari affinità:

Una **dilatazione** di **ragione** k è una trasformazione che altera le distanze secondo un fattore numerico positivo costante k.

In formule: una trasformazione $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una dilatazione di rapporto k se

$$\overline{f_k(A)f_k(B)} = k \cdot \overline{AB} \qquad \forall A, B \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Naturalmente le isometrie sono similitudini con costante di dilatazione $k = 1$. Anche le similitudini trasformano rette in rette e mantengono il parallelismo. Inoltre vale la seguente proprietà:

Proprietà. *Ogni dilatazione mantiene l'ampiezza degli angoli.*

Abbiamo di conseguenza la seguente catena di inclusioni

$$\text{Isometrie} \subset \text{Similitudini} \subset \text{Affinità}$$

Tra tutte le similitudini hanno un ruolo particolarmente rilevante le **omotetie**.

Un'**omotetia** di centro O e **ragione** $k > 0$ è una trasformazoine del piano tale che

- Il punto O è un punto fisso,
- Ogni punto A è trasformato nel punto A' appartenente alla semiretta OA di origine O tale che $\overline{OA'} = k \cdot \overline{OA}$.

È facile ricavare le equazioni di un'omotetia di ragione k e di centro l'origine. Sia infatti $P = (x_P, y_P)$ un punto del piano. Se $x_P = 0$, allora $P' = (0, ky_P)$. Se $x_P \neq 0$, allora P' appartiene alla retta per l'origine e P, di equazione $y = \dfrac{y_P}{x_P}\, x$, quindi $P' = \left(x'; \dfrac{y_P}{x_P}\, x'\right)$. Notiamo che x_P e x' sono concordi. Imponendo la condizione $P'O = k \cdot PO$, otteniamo:

$$PO = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$$

$$P'O = \sqrt{(x')^2 + \left(\frac{y_P}{x_P}\, x'\right)^2} = \left|\frac{x'}{x_P}\right| \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\left|\frac{x'}{x_P}\right| = k$$

Avendo asserato che x_P e x' sono concordi, ne segue che $x' = kx_P$ e quindi $P' = \left(kx_P; \dfrac{y_P}{x_P}\, kx_P\right) = (kx_P; ky_P)$. Infine le equazioni dell'omotetia di ragione k e centro l'origine sono:

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

In maniera del tutto analoga si può dimostrare che le equazioni di un'omotetia di centro $C(x_0; y_0)$ e ragione k ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad M = k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = kI_2$$

È immediato verificare che il punto $(x_0; y_0)$ è effettivamente un punto fisso.

Il gruppo delle similitudini è strettamente legato al gruppo delle omotetie: si può dimostrare che

---

Proprietà. *Ogni similitudine si può ottenere per composizione di una omotetia e di una isometria.*

Quindi lo studio delle isometrie e delle omotetie permette una completa conoscenza di tutte le similitudini.

Possiamo finalmente definire la similitudine tra figure:

Definizione. *Due figure si dicono* **simili** *se si possono ottenere una dall'altra mediante una similitudine, cioè mediante la composizione di un'omotetia e di una isometria.*

Vediamo cosa succede componendo un'omotetia di centro l'origine e ragione k con un'isometria diretta o inversa. L'omotetia manda il generico punto $P = (x; y)$ nel punto $P' = (x'; y') = (kx; ky)$. Applicando ora un'isometria diretta al punto P' otteniamo il punto $P'' = (x''; y'')$ di coordinate:

$$\begin{cases} x'' = cx' - sy' + a \\ y'' = sx' + cy' + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = kcx - ksy + a \\ y'' = ksx + kcy + b \end{cases}$$

Analogamente, applicando prima l'omotetia e poi l'isometria inversa, il generico punto $P = (x; y)$ viene mandato nel punto $P''(x''; y'')$ di equazioni

$$\begin{cases} x'' = kcx + ksy + a \\ y'' = ksx - kcy + b \end{cases}$$

In effetti, dal punto di vista analitico, un'affinità

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + a \\ y' = \gamma x + \delta y + b \end{cases} \quad \text{con matrice associata } M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

è una similitudine di rapporto k se e solo M è di uno dei seguenti tipi:

- $M = \begin{pmatrix} kc & -ks \\ ks & kc \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ con $c^2 + s^2 = 1$,
- $M = \begin{pmatrix} kc & ks \\ ks & -kc \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}$ con $c^2 + s^2 = 1$.

In generale M è tale che $M = k \cdot M'$, con $k > 0$ e M' matrice associata ad un'isometria, quindi $\det(M') = \pm 1$. Per quanto osservato per le isometrie, otteniamo che una matrice M di una similitudine è di uno dei due seguenti tipi:

Similitudine **diretta** - $\quad M = k \cdot \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \det(M) = 1$

Una similitudine diretta è data dalla composizione di una isometria diretta (traslazione o rotazione) con un'omotetia.

Similitudine **inversa** - $\quad M = k \cdot \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \det(M) = -1$

Una similitudine inversa è data dalla composizione di una isometria inversa (riflessione o glissoriflessione) con un'omotetia.

Un'affinità di equazioni:

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + a \\ y' = \gamma x + \delta y + b \end{cases} \quad \text{di matrice } M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

è quindi

- una similitudine diretta di ragione k se
  - $\alpha = \delta$ e $\gamma = -\beta$
  - Per ricavare k osserviamo che
$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \det \left(k \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} kc & -ks \\ ks & kc \end{pmatrix} = k^2$$
    quindi $k = \sqrt{\det(M)}$.

- una similitudine inversa di ragione k se
  - $\alpha = -\delta$ e $\gamma = \beta$
  - Per ricavare k osserviamo che
$$\det\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \det\left(k\begin{pmatrix}c & s\\ s & -c\end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix}kc & ks\\ ks & -kc\end{pmatrix} = -k^2$$
    quindi $k = \sqrt{-\det(M)}$.

Utilizzando l'omotetia verifichiamo la seguente curiosa proprietà. Studiando le parabole e come caso particolare quelle con vertice nell'origine di equazione $y = ax^2$, siamo solito dire che il parametro a determina l'ampiezza della parabola: all'aumentere di a, in valore assoluto, l'apertura della parabola diminuisce e viceversa. In realtà si tratta di un effetto ottico:

tutte le parabole sono tra loro simili

quindi possono essere ottenute una dall'altra tramite una dilatazione. In particolare le parabole con vertice nell'origine possono essere ottenute una dall'altra tramite un'omotetia di centro l'origine.

Siano infatti $y = a_1\,x^2$ e $y = a_2\,x^2$ due parabole con vertice nell'origine. Applichiamo alla prima un'omotetia di centro l'origine e rapporto $k = \dfrac{a_1}{a_2}$, quindi di equazioni:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a_1}{a_2}\,x \\ y' = \dfrac{a_1}{a_2}\,y \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a_2}{a_1}\,x' \\ y = \dfrac{a_2}{a_1}\,y' \end{cases}$$

Sostidendo le seconde equazioni nell'equazione della parabola $y = a_1\,x^2$ otteniamo:

$$\frac{a_2}{a_1}\,y' = a_1 \cdot \left(\frac{a_2}{a_1}\,x'\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_2}{a_1}\,y' = \frac{a_2^2}{a_1}\,x'^2 \quad \Rightarrow \quad y' = a_2 x'^2 \quad \Rightarrow \quad y = a_2 x^2$$

Cioè proprio la seconda parabola. Quindi le due parabole sono simili con rapporto di similitudine $k = \dfrac{a_1}{a_2}$.

CAPITOLO 7

Esercizi

Isometrie

Esercizio 1. Dati i punti i $O(0,0),\ A(2,1),\ B(1,3)$, determinare l'isometria $f(x,y)=(x',y')$ tale che $f(A)=A',\ f(B)=B',\ f(O)=O'$ nei seguenti casi.

Stabilire in particolare se si tratta di una traslazione, rotazione, riflessione e glissoriflessione trovando gli eventuali punti fissi.

Verificare il risultato con GeoGebra.

Suggerimento: rappresenta i punti in modo da capire se si tratta di un'isometria diretta o inversa prima di cominciare calcoli.

a) $O'=\left(-3,\ \frac{1}{2}\right),\ A'=\left(-1,\ \frac{3}{2}\right),\ B'=\left(-2,\ \frac{7}{2}\right)$.

b) $O'=(1,\ 0),\ A'=\left(\frac{5-2\sqrt{2}}{3},\ \frac{1+4\sqrt{2}}{3}\right),\ B'=\left(\frac{4-6\sqrt{2}}{3},\ \frac{3+2\sqrt{2}}{3}\right)$.

c) $O'=(0,\ 0),\ A'=\left(-\frac{2}{5},\ \frac{11}{5}\right),\ B'=\left(\frac{9}{5},\ \frac{13}{5}\right)$.

d) $O'=(-2,\ 1),\ A'=\left(\frac{1}{5},\ \frac{7}{5}\right),\ B'=\left(\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$.

Sol: a) Traslazione; b) Rotazione di $C\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; c) Riflessione con $r:\ y=2x$; d) Glissoriflessione

Esercizio 2. Trovare le rette fisse della traslazione $(x',y')=(x-3,y+2)$.

Sol: $y=-\frac{2}{3}x+q\quad\forall q\in\mathbb{R}$

Esercizio 3. Trovare la retta fissa della glissoriflessione

$$\begin{cases} x'=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-2 \\ \\ y'=\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+1 \end{cases}$$

Sol: $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{6}$

Esercizio 4. Determinare le equazioni della riflessione rispetto alla retta $y=2x$. Determinare inoltre in cosa viene trasformato il punto $P(3,0)$.

Sol: $P'=\left(-\frac{9}{5},\ \frac{12}{5}\right)$

Esercizio 5. Determinare le equazioni della rotazione antioraria di $45°$ attorno al punto $C(1,1)$. Determinare inoltre in cosa viene trasformata la retta $y=3x-1$.

Sol: $r':\quad y'=-2x'+3-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Esercizio 6. Determinare le equazioni della glissoriflessione data dalla composizione della riflessione rispetto alla retta $y=2x+1$ e della traslazione di vettore $\overrightarrow{v}(1,2)$. Determinare inoltre in cosa viene trasformata la parabola $y=x^2$.

Sol: nella parabola $9x^2-24xy+16y^2+34x-87y+121=0$

Affinità‘

Esercizio 7. Date le trasformazioni (affinità)

$$f: \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y + 2 \end{cases} \qquad g: \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

Determinare $f \circ g$, $g \circ f$ e $(g \circ f)^{-1}$

Sol: $f \circ g = (x, y) \to (-2y - 1,\ 2x + 2)$,
$g \circ f = (x, y) \to (-2y - 2,\ 2x - 1)$,
$(g \circ f)^{-1} = (x, y) \to \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}x - 1\right)$

Esercizio 8.

a) Scrivi le equazioni dell'omotetia di centro $C(1, -1)$ e rapporto $k = \dfrac{1}{4}$

b) Determina il centro dell'omotetia

$$\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y + 3 \end{cases}$$

Sol: a) $(x, y) \to \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4},\ \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}\right)$; b) $C(1, -3)$

Esercizio 9. Un'omotetia con centro O trasforma il punto $A(2, -5)$ nel punto A' di ascissa -8. Trova le equazioni dell'omotetia e l'ordinata di A'.

Sol: $(x, y) \to (-4x, -4y)$

Esercizio 10. Trova per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le seguenti equazioni rappresentano una similitudine indiretta di rapporto $\sqrt{5}$

$$\begin{cases} x' = ax + y + a \\ y' = x - ay \end{cases}$$

Sol: $a = \pm 2$

Esercizio 11. Data l'affinità

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$$

verifica che si tratta di una similitudine, determina il suo rapporto k e indica se la similitudine è diretta o inversa.

Trova poi il trasformato del triangolo di vertici $A(-2, -1)$, $B(-1, 2)$, $C(-1, -4)$ e verifica le proprietà che riguardano perimetro ed area del triangolo trasformato.

Sol: similitudine indiretta con $k = \sqrt{2}$

Esame di stato

Esercizio 12. **PNI 01/02, Q10, sessione ordinaria**. Spiegare con esempi appropriati la differenza tra *omotetie* e *similitudini* del piano.

Esercizio 13. **PNI 02/03, Q2, sessione suppletiva**. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono date le affinità di equazioni

$$\begin{cases} x' = (a+1)x - by + a \\ y' = (a-1)x + 2by - 1 \end{cases}$$

dove $a,\ b$ sono parametri reali.

Dimostrare che tra esse vi è una similitudine diretta, e di questa trovare il punto unito.

Esercizio 14. **PNI 03/04, Q10, sessione ordinaria**. Nel piano è data la seguente trasformazione:

$$x \to x\sqrt{3} - y$$
$$y \to x + y\sqrt{3}$$

Di quale traformazione si tratta?

Esercizio 15. **PNI 03/04, Q10, sessione straordinaria**. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le affinità di equazioni

$$\begin{cases} X = mx + 2y - m \\ Y = -x - y + m \end{cases}$$

dome m è un parametro reale. Trovare il luogo geometrico dei punti uniti dell'affinità al variare di m.

Esercizio 16. **PNI 03/04, Q8, sessione suppletiva**. In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono date le affinità di equazioni

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = \dfrac{1}{2}bx - 2 \end{cases}$$

dove $a,\ b$ sono parametri reali.

Tra di esse determinare quella che trasforma il punto $P(1,0)$ nel punto $P(1,-1)$ e stabilire se ammette rette unite.

Esercizio 17. **PNI 04/05, Q3, sessione ordinaria**. Si determino le equazioni di due simmetrie assiali σ e ϕ la cui composizione $\sigma \circ \phi$ dia luogo alla traslazione di equazione

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}$$

Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso, $\phi \circ \sigma$.

Esercizio 18. **PNI 04/05, Q6, sessione ordinaria**. Le rette r e s di equazioni rispettive $y = 1 + 2x$ e $y = 2x - 4$ si corrispondono in un'omotetia σ di centro l'origine. Si determini σ.

Esercizio 19. **PNI 04/05, Q10, sessione suppletiva**. Si consideri la trasformazione geometrica di equazioni

$$x' = 2x + my - 1, \qquad y' = mx - 2y - 2$$

dove m è un parametro reale.

Trovare l'equazione del luogo geometrico dei suoi punti uniti.

ESERCIZIO 20. **PNI 05/06, Q8, sessione supplettiva**. Dimostrare che ogni similitudine trasforma una parabola in una parabola.

ESERCIZIO 21. **PNI 06/07, Q3, sessione ordinaria**. Si dimostri che l'insieme delle *omotetie* con centro O fissato è un *gruppo*.

ESERCIZIO 22. **PNI 06/07, Q3, sessione supplettiva**. Si verifichi che la curva di equazione $y = x^3 + 3x^2 - 1$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso.

ESERCIZIO 23. **PNI 07/08, Q10, sessione ordinaria**. Qual è l'equazione della curva simmetrica rispetto all'origine di $y = \mathrm{e}^{-2x}$? Quale quella della curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante?

ESERCIZIO 24. **PNI 08/09, Q5, sessione supplettiva**. Nell'omotetia di centro $O(0;0)$ e rapproto $k = -4$, si detrmini l'equazione della circonferenza corrispondente alla $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$. Si confrontino fra loro i centri e i raggi delle due circonferenze.

ESERCIZIO 25. **PNI 09/10, Q5, sessione ordinaria**. Sia G il grafico di una funzione $x \to f(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Si illustri in che modo è possibile stabilire se G è simmetrico rispetto alla retta $x = k$.

CAPITOLO 8

Schede di lavoro con GeoGebra

Scheda di lavoro 1. Isometrie: come ottenerle con GeoGebra

Esercizio 1. **Traslazioni.**

Per traslare un oggetto di un vettore, bisogna prima definire l'oggetto ed il vettore. Consideriamo la retta $y = 2x$ e il vettore $v = (2; -3)$.

Nota tecnica per la costruzione di un vettore.

I vettori possono essere definiti utilizzando le apposite opzioni dalla terza icona, oppure scrivendo $v = (2, -3)$ nella barra di inserimento. In questo caso notiamo che se il nome è una lettera maiuscola $A = (2, -3)$, GeoGebra considera un punto, mentre se è una lettera minuscola $a = (2, -3)$ considera il vettore con origine nell'origine degli assi cartesiani ed estremo il punto $(2, -3)$

Dalla terz'ultima icona, quella da utilizzare per tutte le trasformazioni, scegliamo l'opzione *trasla di un vettore* e disegnamo il grafico di f', traslazione della retta iniziale.

Ricava le equazioni della trasformazione:

$$\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases}$$

Dopo avere ricavato le equazioni della trasformazione inversa

$$\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

determina l'equazione della nuova funzione traslata. Verifica il risultato con quanto riportato nella finestra algebra di GeoGebra.

Esercizio 2. Ripeti l'esericizio precedente con la funzione $f(x) = x^3 - x^2$ e il vettore $v = (3, 4)$.

Esercizio 3. **Simmetrie assiali o riflessioni.**

Utilizzando la terzultima icona, data una funzione $f(x)$, puoi tracciare il grafico della funzione f', simmetrica ad f rispetto ad una qualsiasi retta.

Per esempio traccia il grafico di $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$ e la retta $r: \ y = x$. Traccia quindi il grafico della funzione f' simmetrica ad f rispetto a r.

Ricava le equazioni della trasformazione:

$$\begin{cases} x' = \\ y' = \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

e determina l'equazione della nuova funzione. Verifica il risultato con quanto riportato nella finestra algebra di GeoGebra.

Cosa puoi dire in questo caso particolare delle funzioni f e f'?

Esercizio 4. Ripeti l'esercizio precedente con le seguenti funzioni e rette:

a) $f(x) = 3x + 5 \qquad r: \ x = 3$

b) $f(x) = x^2 - 5 \qquad r: \ y = -2$

Esercizio 5. Notiamo che partendo da una funzione ed effettuando una simmetria, non è detto che si ottenga ancora una funzione. Per esempio cosa succede calcolando la simmetrica di $f(x) = x^2$ rispetto ad $y = x$? Qual è l'equazione dell'oggetto rappresentato?

Esercizio 6. In alcuni casi GeoGebra non vede le funzioni come oggetti. In questi casi possiamo procedere nel seguente modo, determinando la simmetrica punto per punto. Per esempio tracciamo la simmetrica di $f(x) = x^4 - 2x + 1$ rispetto ad $r: \ y = 2x - 3$ nel seguente modo:

- dopo avere tracciato i grafici di f e r prendi un punto A su f.
- Traccia quindi il simmetrico A'di A rispetto a r.
- Facendo muovere A su f il punto A' segue il grafico della funzione f'. Scegliendo per A' l'opzione *traccia attiva* si ottiene un risultato apprezzabile.
- Scegliendo dalla quarta icona l'opzione *luogo* si ottiene il grafico.

In questo modo, però, non otteniamo alcuna informazione sull'equazione dell'oggetto tracciato.

Esercizio 7. Data una funzione $f(x)$, allora

- $f(x)$ è **pari** sse $f(-x) = f(x)$,
- $f(x)$ è **dispari** sse $f(-x) = -f(x)$,

In alternativa si può dare la seguente definizione Data una funzione $f(x)$, allora

- $f(x)$ è **pari** sse il grafico di $f(x)$ è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.
- $f(x)$ è **dispari** sse il grafico di $f(x)$ è simmetrico rispetto all'origine.

Stabilisci, con carta e penna utilizzando la prima definizione, se le seguenti funzioni sono pari o dispari

$$f_1(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 5}$$
$$f_2(x) = x^3 - 4x + 1$$
$$f_3(x) = x^3 - 5x$$
$$f_4(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$$
$$f_5(x) = \frac{x^3 - x}{x^3 + 2x}$$

Stabilisci poi con GeoGebra, utilizzando la costruzione del grafico simmetrico vista negli esercizi precedenti, se i risultati corrispondono in base alla seconda definizione.

Esercizio 8. **Rotazioni.** Una rotazione è definita da un punto, centro di rotazione e da un angolo. Come per le altre trasformazioni si procede utilizzando la terz'ultima icona. Notare che si può scegliere il verso di rotazione oraria o antioraria.

Costruisci il triangolo di vertici $A = (1; 2)$ $B = (3; -1)$ e $C = (2; 4)$. Effetua una rotazione oraria del triangolo ABC di centro $P = (-1; -2)$ e di un angolo di $50°$. Effettua poi una rotazione oraria del triangolo ABC di centro $P = (-1; -2)$ e di angolo $A\widehat{B}C$.

Esercizio 9. **Rotazioni e simmetrie centrali.** Una rotazione di un angolo piatto e centro P corrisponde a una simmetria centrale di centro P. Verifica tale proprietà per il triangolo e il punto P dell'esercizio precedente.

Scheda di lavoro 2. Isometrie: come riconoscerle e determinarne le caratteristiche

Esercizio 10. Nella tabella seguente vengono descritti un triangolo e il suo trasformato tramite un'isometria del piano. La trasformazione utilizzata può essere una traslazione, una rotazione, una simmetria assiale, una simmetria centrale, una glissosimmetria oppure può darsi che non esista alcuna isometria che trasforma il primo triangolo nel secondo.

Osservando le figure date, congetturate quale tipo di isometria è stata utilizzata e controllate se la vostra congettura è corretta con l'ausilio di GeoGebra.

Completate la scheda descrivendo le isometrie che avete trovato e specificandone le caratteristiche.

Attenzione: alcune coordinate sono state approssimate alla seconda cifra decimale; questo potrebbe portare a qualche imprecisione.

	A	B	C	A'	B'	C'
a)	(-3,2)	(-1,5)	(1;1)	(1;-4)	(-1; -7)	(-3;-3)
b)	(-3,2)	(-1,5)	(1;1)	(-5; 5)	(-3; 8)	(-1; 4)
c)	(-3,2)	(-1,5)	(1;1)	(5,8;1,6)	(2,4;2,8)	(3,2;-1,6)
d)	(-3,2)	(-1,5)	(1;1)	(-3;14)	(-1;11)	(1;15)
e)	(-3,2)	(-1,5)	(1;1)	(-4,87;3,23)	(-6,46; 6,46;)	(-2;6,2)
f)	(-3,2)	(-1,5)	(1;1)	(2,6;-0,8)	(3,8;2,6)	(-0,6;1, 8)

Esercizio	Tipo si trasformazione e sue caratteristiche principali
a)	
b)	
c)	
d)	
e)	
f)	

Esercizio 11. Costruisci con GeoGebra un triangolo isoscele di vertice $A(-1;0)$ e lato obliquo di lunghezza 3 (naturalmente se ne può costruire più di uno); indica con B e C gli estremi della base.

Spiega brevemente come hai effettuato la costruzione e scrivi le coordinate dei vertici B e C.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Sapendo che il punto A viene trasformato nel punto $A'(-5;4)$ tramite una simmetria centrale, trova le coordinate degli altri due vertici B' e C' del triangolo $A'B'C'$ trasformato di ABC tramite la

simmetria centrale.

Esercizio 12. Costruisci con Geogebra un triangolo equilatero di vertice $A(2;1)$ e lato di lunghezza 2; indica con B e C gli altri vertici del triangolo.

Spiega brevemente come hai effettuato la costruzione e scrivi le coordinate dei vertici B e C.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Sapendo che il punto A viene trasformato nel punto $A'(6;-1)$ tramite una simmetria assiale, trova le coordinate degli altri due vertici B' e C' del triangolo $A'B'C'$ trasformato di ABC tramite la simmetria assiale.

Esercizio 13. Immagina che il semiasse positivo delle ascisse e il semiasse positivo delle ordinate siano due bordi di un tavolo da biliardo. Se la palla si trova in posizione $(1;3)$, verso quale direzione devo mandarla in modo che, facendo sponda sull'asse delle ascisse, colpisca una palla ferma in posizione $(5;2)$?

Suggerimento: il rimbalzo della palla sull'asse delle ascisse avviene in modo che le traiettorie della palla prima e dopo la sponda abbiano lo stesso angolo di rifrazione, ovvero siano simmetriche rispetto alla retta...

Scheda di lavoro 3. Composizione di isometrie

Nei prossimi esercizi vogliamo analizzare alcuni casi di composizione di isometrie. In particolare, dato il teorema delle tre riflessioni:

Teorema. Ogni isometria può essere ottenuta dalla composizione di una, due o tre riflessioni.

Ci interesseremo delle composizioni in cui sono coinvolte le riflessioni.

Nei seguenti esercizi siano $A = (1, 2)$, $B(4, -1)$ e $C = (2, 4)$.
Per riuscire a trovare delle regole generali, in alcuni casi può essere conveniente cambiare i dati (gli assi di simmetria, il vettore di traslazione...) in modo da verificare di non essere incappati in un caso particolare.

Vediamo cosa succede componendo due riflessioni.

Esercizio 14. Vediamo cosa succede componendo due riflessioni di assi tra loro **paralleli**.

- Disegna il triangolo ABC e due rette r e s tra loro parallele, per esempio le rette $r: \ y = -2x - 2$ e $s: \ y = -2x + 1$.
- Costruisci il trangolo $A'B'C'$ simmetrico di ABC rispetto alla retta r.
- Costruisci il trangolo $A''B''C''$ simmetrico di $A'B'C'$ rispetto alla retta s.

Riesci a trovare un'isometria che al triangolo ABC faccia corrispondere il triangolo $A''B''C''$?
Dopo avere svolto l'esercizio completa la seguente tabella:

Coordinate di A', B' e C'	
Coordinate di A'', B'' e C''	
Trasformazione trovata	
Relazione tra le rette r e s e la trasformazione trovata	

Esercizio 15. Vediamo cosa succede componendo due riflessioni di assi tra loro **incidenti**.

- Disegna il triangolo ABC e due rette r e s tra loro non parallele, per esempio le rette $r: \ y = -2x - 2$ e $s: \ y = x + 4$.
- Costruisci il trangolo $A'B'C'$ simmetrico di ABC rispetto alla retta r.
- Costruisci il trangolo $A''B''C''$ simmetrico di $A'B'C'$ rispetto alla retta s.

Riesci a trovare un'isometria che al triangolo ABC faccia corrispondere il triangolo $A''B''C''$?
Dopo avere svolto l'esercizio completa la seguente tabella:

Coordinate di A', B' e C'	
Coordinate di A'', B'' e C''	
Trasformazione trovata	
Relazione tra le rette r e s e la trasformazione trovata	

Esercizio 16. Come caso particolare dell'esercizio precedente, vediamo cosa succede componendo due riflessioni di assi tra loro **perpendicolari**.

- Disegna il triangolo ABC e due rette r e s tra loro perpendicolari, per esempio le rette $r:\ y = -2x - 2$ e $s:\ y = \frac{1}{2}x + 4$.
- Costruisci il trangolo $A'B'C'$ simmetrico di ABC rispetto alla retta r.
- Costruisci il trangolo $A''B''C''$ simmetrico di $A'B'C'$ rispetto alla retta s.

Riesci a trovare un'isometria che al triangolo ABC faccia corrispondere il triangolo $A''B''C''$?
Dopo avere svolto l'esercizio completa la seguente tabella:

Coordinate di A', B' e C'	
Coordinate di A'', B'' e C''	
Trasformazione trovata	

Possiamo concludere che, componendo **due riflessioni** si hanno le seguenti possibilità:

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Vediamo ora cosa succede cosa componendo una riflessione con una traslazione o con una rotazione. Nei seguenti esercizi siano ancora $A = (1, 2)$, $B(4, -1)$ e $C = (2, 4)$.

Esercizio 17. Vediamo cosa succede componendo una riflessione con una traslazione (non parallela all'asse di simmetria).

- Disegna il triangolo ABC, la retta $r: \ y = -2x - 2$ e il vettore $v = (1, 5)$.
- Costruisci il trangolo $A'B'C'$ simmetrico di ABC rispetto alla retta r.
- Costruisci il trangolo $A''B''C''$ ottenuto traslando $A'B'C'$ del vettore v.

Riesci a trovare un'isometria che al triangolo ABC faccia corrispondere il triangolo $A''B''C''$?
Dopo avere svolto l'esercizio completa la seguente tabella:

Coordinate di A', B' e C'	
Coordinate di A'', B'' e C''	
Trasformazione trovata	
Relazione tra la retta r, il vettore v e la trasformazione trovata	

Esercizio 18. Vediamo cosa succede componendo una riflessione con una rotazione

- Disegna il triangolo ABC, la retta $r: \ y = -3x - 4$ e il centro di rotazione $H = (-1, 2)$
- Costruisci il trangolo $A'B'C'$ simmetrico di ABC rispetto alla retta r.
- Costruisci il trangolo $A''B''C''$ ottenuto ruotando $A'B'C'$ di un angolo di $\alpha = 45°$ rispetto al centro C.

Riesci a trovare un'isometria che al triangolo ABC faccia corrispondere il triangolo $A''B''C''$?
Dopo avere svolto l'esercizio completa la seguente tabella:

Coordinate di A', B' e C'	
Coordinate di A'', B'' e C''	
Trasformazione trovata	
Relazione tra la retta r, il punto H e la trasformazione trovata	

Possiamo concludere che, componendo una **riflessione** con una **traslazione** o con una **rotazione** si hanno le seguenti possibilità:

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

VERIFICA DELLE CONOSCENZE DI BASE: algebra, equazioni e disequazioni

Elisabetta Ossanna, Dipartimento di Matematica - Università di Trento
Francesca Arrigoni, Istituto di Istruzione "M. Curie" – Pergine
Francesca Mazzini, Dipartimento di Matematica - Università di Trento

Introduzione

A partire dal 2008 alcuni docenti dell'Istituto "M. Curie" di Pergine e del Liceo "Russell" di Cles, osservando le difficoltà riscontrate dagli studenti nella risoluzione di "semplici" equazioni e disequazioni, anche in prossimità degli esami di stato, hanno avviato una riflessione su questo problema. Tale riflessione ha portato alla costruzione di una verifica (successivamente per brevità chiamata anche test), da somministrare agli studenti alla fine del secondo anno, che diventasse uno strumento per far emergere le difficoltà degli studenti e contemporaneamente aiutasse gli insegnanti a individuare gli elementi di criticità a livello didattico. Partendo da questo primo lavoro si è poi sviluppata all'interno del *"Progetto Didattica Laboratoriale della Matematica e Delle Scienze"*[31] una riflessione sulle modalità per migliorare questo strumento di verifica.

Nel progetto qui documentato lo strumento di verifica è stato ampliato includendo alcuni aspetti geometrici, facendo anche riferimento alle richieste contenute nelle verifiche in ingresso ai corsi di laurea scientifici e ponendo l'attenzione sullo sviluppo graduale, nell'arco della scuola secondaria superiore di secondo grado, delle competenze e conoscenze interessate. Sono stati costruiti due questionari: uno per la classe terza e uno per la classe quarta della scuola secondaria superiore di secondo grado, tenendo conto dei nuovi Piani di Studio Provinciali e delle Indicazioni Nazionali. Negli ultimi due anni scolastici non si è più svolto più il test a fine biennio, essendo già gli studenti del secondo anno sottoposti alla prova Invalsi (nella quale sono presenti domande "assimilabili" al test del progetto).

Si ritiene importante sottolineare come la progettazione e l'analisi delle somministrazioni abbiano costituito un importante punto di partenza per avviare nei docenti coinvolti una significativa riflessione sulla pratica didattica con conseguente innovazione dei percorsi didattici proposti agli studenti, come ampiamente documentato nella sezione delle sperimentazioni didattiche.

Per esempio è emerso come spesso l'algebra non sia percepita come uno strumento per pensare, ma si riduca a una manipolazione simbolica in cui si applicano delle regole sintattiche senza controllo sul relativo significato.

Conseguentemente a queste riflessioni, si sono strutturate delle attività didattiche che privilegiassero l'aspetto semantico su quello sintattico, partendo dalle proprietà dei numeri e dalla loro generalizzazione attraverso attività di problem-solving che gradualmente introducessero la necessità di usare la lettera per generalizzare una proprietà e di agire manipolando su scritture che includono delle lettere. La stessa analisi la troviamo anche nella Guida sintetica alla lettura della prova di Matematica - Classe seconda – Scuola secondaria di II grado[32] del SNV dove si dice *"Il calcolo simbolico,…,. sembra essere visto, paradossalmente, come un campo di esperienza sintattica recintato e non comunicante con gli oggetti numerici*".

Le attività di problem solving hanno permesso di far utilizzare l'algebra per rappresentare la soluzione di un problema mediante un modello matematico, per fare in modo che "*più che la capacità di manipolazione sintattica di formule, la nostra scuola fornisca la capacità di produrre formule, il cui valore semantico abbia lo scopo di descrivere relazioni funzionali tra grandezze*"[33].

---

31 Progetto promosso da IPRASE in collaborazione col Dipartimento di Matematica dell'Università degli studi di Trento finanziato da Fondazione Cassa di Risparmio di Trento e Rovereto

32 QUADERNI SNV N. 1-MAT Servizio Nazionale di Valutazione anno scolastico 2010/11 Guida sintetica alla lettura della prova di Matematica Classe seconda – Scuola secondaria di II grado, Michele Impedovo, Aurelia Orlandoni, Domingo Paola

33 QUADERNI SNV N. 1-MAT Servizio Nazionale di Valutazione anno scolastico 2010/11 Guida sintetica alla lettura della prova di Matematica Classe seconda – Scuola secondaria di II grado, Michele Impedovo, Aurelia Orlandoni, Domingo Paola

In questa sezione si fa un'analisi delle somministrazioni effettuate negli anni scolastici 2010/11 e 2011/12 nelle classi terze e quarte degli Istituti coinvolti nel progetto. In particolare, si riportano

- la descrizione del campione
- il quadro di riferimento delle verifiche
- i quesiti e le percentuali di risposte del "Test di Terza" 2010/2011 e 2011/2012
- i quesiti e le percentuali di risposte del "Test di Quarta" 2010/2011 e 2011/2012
- un esempio di analisi degli errori.

Descrizione del campione

Il campione al quale sono stati somministrati i questionari non presenta caratteristiche di omogeneità tali da poter essere considerato rappresentativo della popolazione scolastica iscritta al terzo o quarto anno in una scuola secondaria di secondo grado della Provincia di Trento, quindi le considerazioni che si possono trarre dall'analisi delle risposte sono da riferirsi esclusivamente alla popolazione coinvolta nella sperimentazione.
Si riportano qui sotto alcuni dati sul campione cui sono stati somministrati i questionari di terza e quarta negli anni scolastici 2010/11 e 2011/12.

Nell'anno scolastico 2010-11 il "test di terza" è stato somministrato a 310 studenti del terzo anno di diversi indirizzi di studio degli istituti Russell, Curie e Da Vinci.
Nel **Grafico 1** viene visualizzata la composizione percentuale del campione suddivisa per Istituto, mentre nel **Grafico 2** quella per indirizzo.

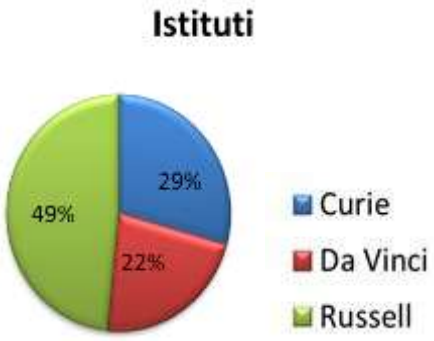


Grafico 1

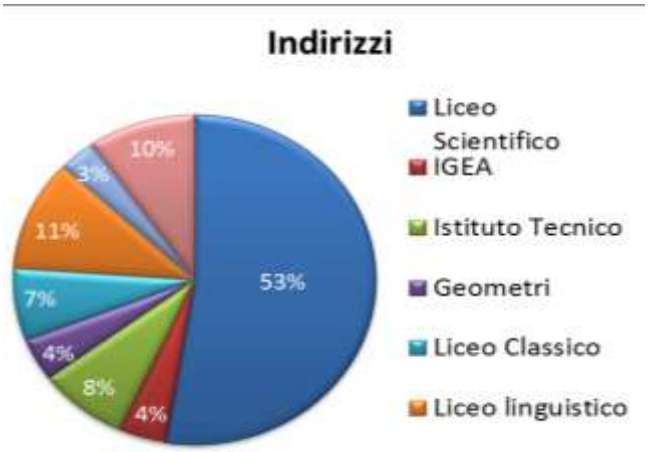


Grafico 2

Nello stesso anno scolastico è stato somministrato il "test di quarta" a 256 studenti del quarto anno di diversi indirizzi di studio degli istituti Russell, Floriani, Curie e Da Vinci.
Nel **Grafico 3** viene visualizzata la composizione percentuale del campione suddivisa per Istituto, mentre nel **Grafico 4** quella per indirizzo.

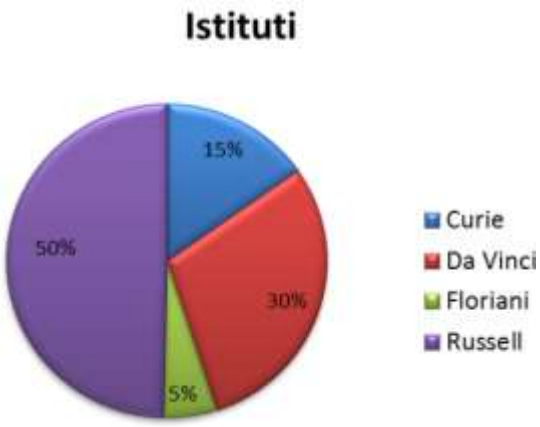


Grafico 3

Grafico 4

Nell'anno scolastico 2011-12 il "test di terza" è stato somministrato a 252 studenti del terzo anno di diversi indirizzi di studio degli istituti Russell, Floriani, Curie e Da Vinci.
Nel **Grafico 5** viene visualizzata la composizione percentuale del campione suddivisa per Istituto, mentre nel **Grafico 6** quella per indirizzo.

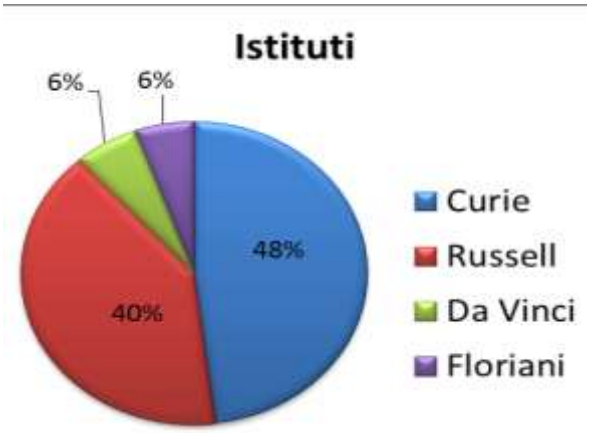


Grafico 5

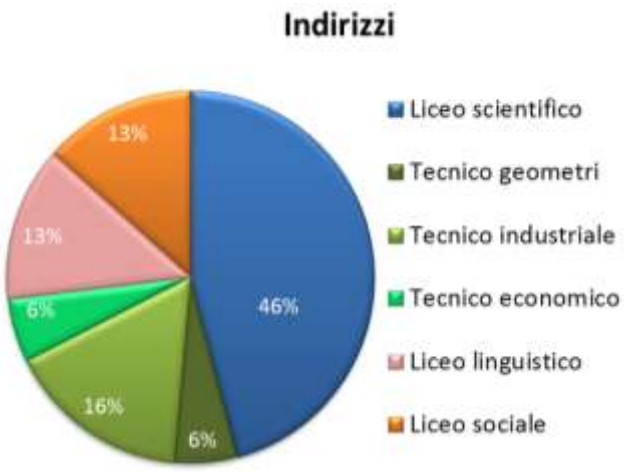


Grafico 6

Nello stesso anno scolastico è stato somministrato il "test di quarta" a 223 studenti del quarto anno di diversi indirizzi di studio degli istituti Russell, Floriani, Curie e Da Vinci.
Nel **Grafico 7** viene visualizzata la composizione percentuale del campione suddivisa per Istituto, mentre nel **Grafico 8** quella per indirizzo.

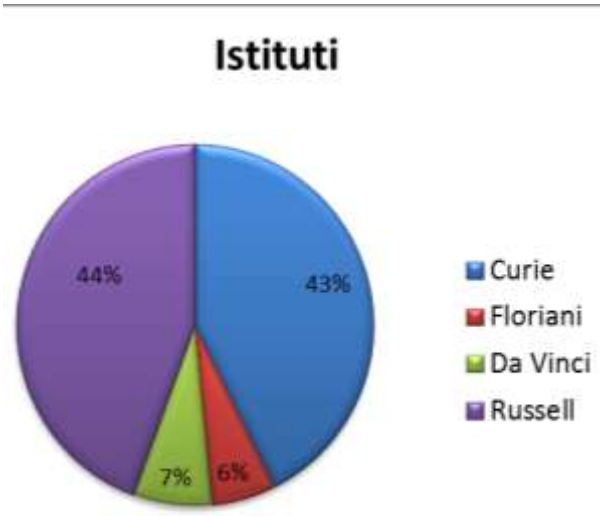


Grafico 7

Grafico 8

Quadro di riferimento delle verifiche

Il gruppo di lavoro ha riscontrato una corrispondenza tra gli intenti che hanno guidato la costruzione dei quesiti e quanto riportato nel Syllabus delle conoscenze richieste per l'accesso ai corsi di laurea scientifici[34] del Piano Lauree Scientifiche e ConScienze. Si riportano qui sotto alcuni aspetti del syllabus che si riferiscono alle scelte effettuate nella costruzione delle verifiche qui descritte.

> **2. Algebra**
> Manipolazione di espressioni algebriche. Concetto di soluzione e di "insieme delle soluzioni" di una equazione, di una disequazione, di un sistema di equazioni e/o disequazioni. Equazioni e disequazioni di primo e secondo grado. Sistemi lineari.
>
> **3. Geometria**
> Principali figure piane e loro proprietà elementari. Teorema di Pitagora. Proprietà dei triangoli simili. […]. Perimetro e area delle principali figure piane. Incidenza, parallelismo, perpendicolarità tra rette nel piano. Principali figure nello spazio (rette, piani, parallelepipedi, prismi, piramidi, cilindri, coni, sfere).
> Volume dei solidi elementari. Coordinate cartesiane nel piano. Equazione della retta per due punti.
> Equazione di una retta per un punto e parallela o perpendicolare a una retta data. […]. Distanza tra due punti.
>
> **4. Funzioni, grafici, relazioni (*abbreviato*: Funzioni)**
> Linguaggio elementare delle funzioni. […]Grafico di una funzione. Funzioni potenza, radice, valore assoluto, polinomi di primo e secondo grado, funzione $1/x$, e loro grafici. Funzioni esponenziale e logaritmo, in base 2 e 10, e loro grafici. […]. Semplici equazioni e disequazioni costruite con queste funzioni.
> […]
> In tutti i quesiti occorre comprendere un testo che può contenere numeri, formule e figure.
> […]
> In alcuni quesiti è necessario passare dalla descrizione a parole di una situazione (per esempio di una relazione fra grandezze) a una sua formalizzazione algebrica oppure a una sua rappresentazione grafica, e viceversa.

Partendo dall'analisi delle difficoltà degli studenti si sono individuati alcuni aspetti ritenuti fondamentali per l'apprendimento di alcune competenze base relative all'algebra e alle equazioni e disequazioni e sui quali si basa la verifica. Tali aspetti sono elencati di seguito e collegati con i Piani di Studio Provinciali[35].

1. **Accostamento al simbolo attraverso i numeri**
2. **Problemi ed equazioni (livello base)**
3. **Capacità operative relative al calcolo**
4. **Problemi ed equazioni (livello avanzato)**

[34] https://laureescientifiche.cineca.it/studenti/documenti/syllabi2011.pdf

[35] PROPOSTE DI LINEE GUIDA PER IL PRIMO BIENNIO DEL SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE E FORMAZIONE PROFESSIONALE (Matematica) – si veda http://www.vivoscuola.it/piani-di-studio-secondo-ciclo - Proposte di linee guida per il primo biennio

1. Accostamento al simbolo attraverso i numeri:

- riflessione sulle proprietà dei numeri intesi come un sistema con operazioni e relazione d'ordine
- riflessione sulle rappresentazioni dei numeri quali frazioni, decimali, percentuali e notazione scientifica anche come modellizzazione di situazioni problematiche [ad esempio quesito 10 del "test di terza" e quesito 12 del "test di quarta"]
- uso dei simboli in funzione di traduzione di comportamenti generali (di una proprietà, di una situazione contesto o situazione problema) [ad esempio quesito 6 del "test di terza"]

da Proposte di linee guida - Suggerimenti di carattere prevalentemente metodologico

Aritmetica e algebra
Lo studente acquisirà la capacità di eseguire calcoli con le espressioni letterali sia per rappresentare un problema (mediante un'equazione, disequazioni o sistemi) e risolverlo, sia per dimostrare risultati generali, in particolare in aritmetica.

2. Problemi ed equazioni (livello base)

- Modellizzazione, formalizzazione e soluzione di semplici problemi (utilizzando semplici equazioni o disequazioni di primo grado) [ad esempio quesiti 2 e 7 del "test di terza"]
- Risoluzione di semplici equazioni, disequazioni e sistemi di 1° grado (nel senso che il calcolo polinomiale, inteso come manipolazione di espressioni è ridotto al minimo) [ad esempio quesiti 3 del "test di terza"]
- Significato di soluzione di un'equazione o disequazione o sistema. Conoscere il significato di insieme delle soluzioni. [ad esempio quesito 1 del "test di terza" e quesiti 1 e 9 del "test di quarta"]
- Uso consapevole del piano cartesiano e rappresentazione grafica di funzioni di primo grado, significato di pendenza e effetti sul grafico, applicazione nella risoluzione di equazioni e disequazioni di 1° grado e sistemi di 1° grado [ad esempio quesiti 8 e 11 del "test di terza" e quesiti 10, 13 e 14 del "test di quarta"]

3. Capacità operative relative al calcolo

- Manipolazione di formule [ad esempio quesito 5 del "test di terza" e quesito 7 del "test di quarta"]
- Prodotto di polinomi (proprietà distributiva)
- Prodotti notevoli (quadrato e cubo di un binomio, somma per differenza)
- Scomposizione (raccoglimento totale, prodotti notevoli)

da Proposte di linee guida - Suggerimenti di carattere prevalentemente metodologico

Aritmetica e algebra
Lo studente apprenderà gli elementi di base del calcolo letterale, le proprietà dei polinomi e le operazioni tra di essi. **Saprà fattorizzare semplici polinomi, saprà eseguire semplici casi di divisione con resto fra due polinomi, e ne approfondirà l'analogia con la divisione fra numeri interi. Anche in questo l'acquisizione della capacità calcolistica non comporterà tecnicismi eccessivi.**

4. Problemi ed equazioni (livello avanzato)

- Modellizzazione e formalizzazione di problemi e risoluzione utilizzando gli strumenti algebrici disponibili (equazioni e disequazioni di 1° e 2° grado, sistemi di equazioni e disequazioni, semplici equazioni irrazionali in un contesto geometrico) [ad esempio quesito 2 del "test di quarta"]
- Risoluzione di equazioni, disequazioni e sistemi di 2° grado e riconducibili al 2° grado (sia attraverso la formula risolutiva che con altri strumenti a seconda della struttura dell'equazione) [ad esempio quesiti 3 e 4 del "test di terza" e quesiti 3, 4, 5, 6 e 8 del "test di quarta"]
- Rappresentazione grafica di funzioni di 2°grado, significato geometrico del coefficiente del termine di 2° grado e del termine noto, applicazione nella risoluzione di equazioni e disequazioni. di 2° grado [ad esempio quesito 8 del "test di terza" e quesito 10 del "test di quarta"]
- Rappresentazione grafica di funzioni generiche, applicazione nella risoluzione di equazioni e disequazioni [ad esempio quesito 9 del "test di terza" e quesito 11 del "test di quarta"]

da Proposte di linee guida - Suggerimenti di carattere prevalentemente metodologico

Geometria

Lo studente apprenderà a far uso del metodo delle coordinate cartesiane, in una prima fase limitandosi alla rappresentazione di punti, rette e fasci di rette nel piano e di proprietà come il parallelismo e la perpendicolarità.

da Proposte di linee guida - Suggerimenti di carattere prevalentemente metodologico

Relazioni e funzioni

Obiettivo di studio sarà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.), anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico. In particolare, lo studente apprenderà a descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni; a ottenere informazioni e ricavare le soluzioni di un modello matematico di fenomeni, anche in contesti di ricerca operativa o di teoria delle decisioni.
Lo studente studierà le funzioni del tipo f(x) = ax + b, f(x) = |x|, f(x) = a/x, f(x) = x2 sia in termini strettamente matematici sia in funzione della descrizione e soluzione di problemi applicativi. Saprà studiare le soluzioni delle equazioni di primo grado in una incognita, delle disequazioni associate e dei sistemi di equazioni lineari in due incognite, e conoscerà le tecniche necessarie alla loro risoluzione grafica e algebrica. Apprenderà gli elementi della teoria della proporzionalità diretta e inversa.

[Per i Licei scientifici in alternativa al precedente capoverso]

Lo studio delle funzioni del tipo f(x) = ax + b, f(x) = ax2 + bx + c e la rappresentazione delle rette e delle parabole nel piano cartesiano consentiranno di acquisire i concetti di soluzione delle equazioni di primo e secondo grado in una incognita, delle disequazioni associate e dei sistemi di equazioni lineari in due incognite, nonché le tecniche per la loro risoluzione grafica e algebrica.

Lo studente sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati.

“Test di Terza” - Quesiti e analisi domande

2010/2011 e 2011/2012

1. Quale dei seguenti numeri è soluzione dell’equazione $2^x = \sqrt{x+14}$?

-2 ☐ 2 ☐ 0 ☐ 1 ☐

Domanda 1 – dal test 2011	
Corretta	93,9%
Errata	3,5%
Non data	2,6%

1. Indica quale delle seguenti coppie di numeri reali è soluzione del sistema di equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = 2^x \end{cases}$$

A $(-2,-1)$ **B** $(2,1)$ **C** $(-1,-2)$ **D** $(1,2)$

Domanda 1 – dal test 2012	
Corretta	79,4%
Errata	14,3%
Non data	6,3%

2. Durante un safari un gruppo ha a disposizione una tanica contenente L litri di acqua. Dopo tre giorni sono stati consumati i 3/7 della scorta; il giorno successivo si consumano altri 8 litri e a questo punto rimane 1/5 del contenuto della tanica.
   Scrivi un'equazione che ti permetta di calcolare quanti litri conteneva inizialmente la tanica.

Domanda 2	2011	2012
Corretta	27,7%	32,9%
Errata	46,1%	39,3%
Non data	26,1%	27,8%

3. Risolvi le seguenti equazioni indicando nella terza colonna della tabella l’insieme delle soluzioni[36] e **motivando** la risposta.

Equazione	
a	$2x^2 \cdot (x^2 - 1) = 0$
b	$x \cdot (2x + 3) = 2$
c	$\frac{x-2}{x-1} = \frac{2x-3}{x-1} + 2$
d	$x^4 - 4 = 0$

Domanda 3		2011	2012
a)	Corretta	59,4%	42,9%
	Errata	28,1%	40,9%
	Non data	12,6%	16,3%
b)	Corretta	65,2%	55,6%
	Errata	25,2%	33,3%
	Non data	9,7%	11,1%
c)	Corretta	27,1%	26,2%
	Errata	60,0%	55,2%
	Non data	12,9%	18,7%
d)	Corretta	41,6%	29,8%
	Errata	39,4%	48,4%
	Non data	19,0%	21,8%

[36] Per insieme delle soluzioni di un’equazione o di una disequazione si intende l’insieme dei numeri che sostituiti alla variabile x rendono vera la relazione (l’equazione o la disequazione)

4. Risolvi le seguenti disequazioni indicando l’insieme delle soluzioni e **motivando** la risposta.

Disequazione	
a	$\frac{2x}{1-x} \geq 3$
b	$-x^2 - 25 \leq 0$
c	$6x \leq 9x^2$
d	$-\frac{3}{x} < 0$
e	$(x+3)^2 \leq 0$

Domanda 4		2011	2012
a)	Corretta	23,9%	21,0%
	Errata	56,5%	45,6%
	Non data	19,7%	33,3%
b)	Corretta	31,9%	31,0%
	Errata	48,4%	44,4%
	Non data	19,7%	79,4%
c)	Corretta	27,1%	27,0%
	Errata	49,0%	38,1%
	Non data	23,9%	34,9%
d)	Corretta	39,7%	37,7%
	Errata	25,8%	21,8%
	Non data	34,5%	40,5%
e)	Corretta	-	35,3%
	Errata	-	36,1%
	Non data	-	28,6%

5. Data la formula $F = \frac{k}{r^2}$ con r, F, k positivi.

   a) Determina il valore di *r* sapendo che $k = 2$ e $F = 32$.

   b) Trova una legge generale che permetta di determinare *r* in funzione delle variabili *F* e *k*.

Domanda 5		2011	2012
a)	Corretta	49,4%	45,2%
	Errata	42,3%	40,5%
	Non data	8,4%	14,3%
b)	Corretta	56,5%	42,1%
	Errata	26,1%	26,2%
	Non data	17,4%	31,7%

6. Un quadrato ha area A. Triplicando il lato si ottiene un nuovo quadrato di area A_1. Qual è la relazione tra le due aree?

   A $A_1 = 3A$

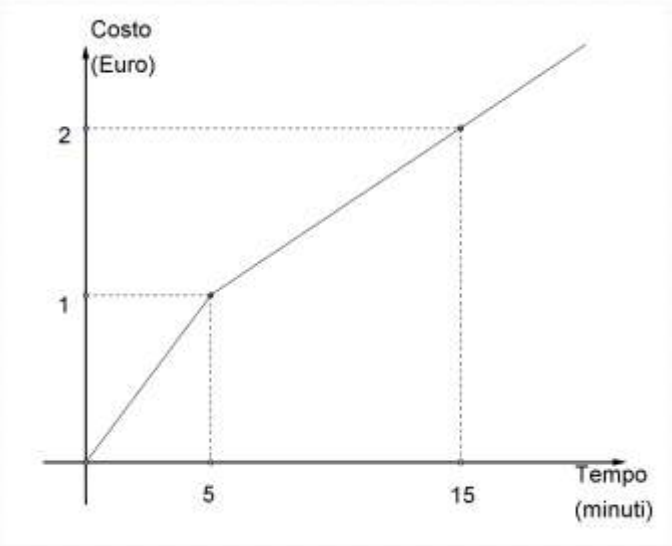
   B $A = 9A_1$

   C $A_1 = \sqrt{3}A$

   D $A_1 = 9A$

Domanda 6	2011	2012
Corretta	1,3%	64,3%
Errata	66,5%	32,5%
Non data	32,3%	3,2%

7. Nel grafico è rappresentato il costo di una telefonata al variare del tempo.



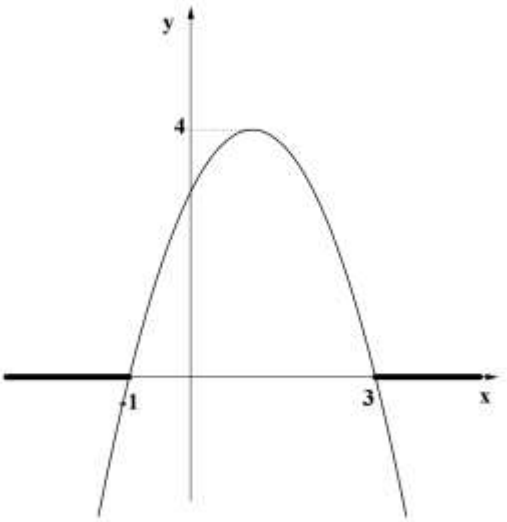
a) Utilizzando le informazioni riportate nel grafico calcola il costo di una telefonata di 10 minuti (spiega come ottieni il risultato).

b) Se una telefonata ti è costata 5 euro, quanti minuti sei stato al telefono?
(spiega come ottieni il risultato)

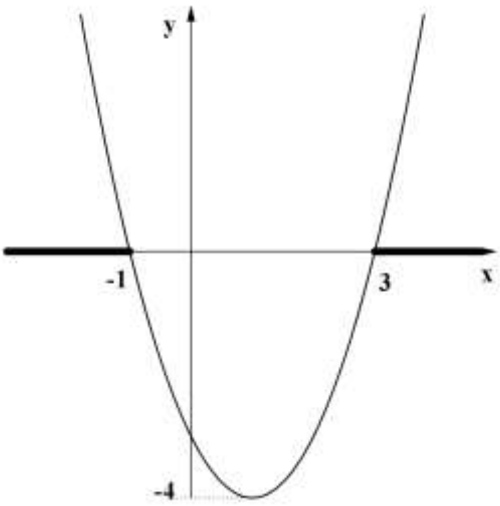
Domanda 7		2011	2012
a)	Corretta	62,3%	57,5%
	Errata	24,8%	24,2%
	Non data	12,9%	18,3%
b)	Corretta	45,2%	41,3%
	Errata	37,7%	38,9%
	Non data	17,1%	19,8%

8. Indica in quale figura è rappresentata la parabola $y = -x^2 + 2x + 3$ ed è evidenziato in grassetto l’insieme delle soluzioni della disequazione $-x^2 + 2x + 3 > 0$.

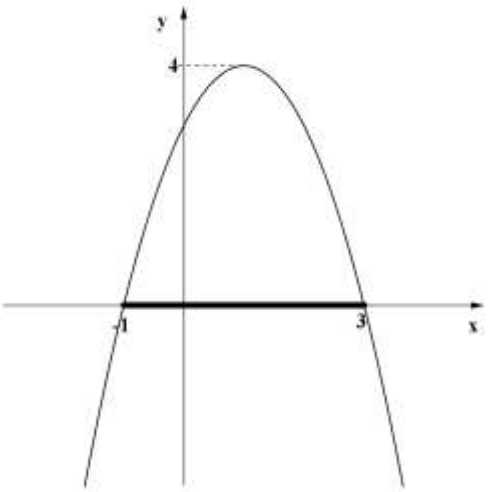
A



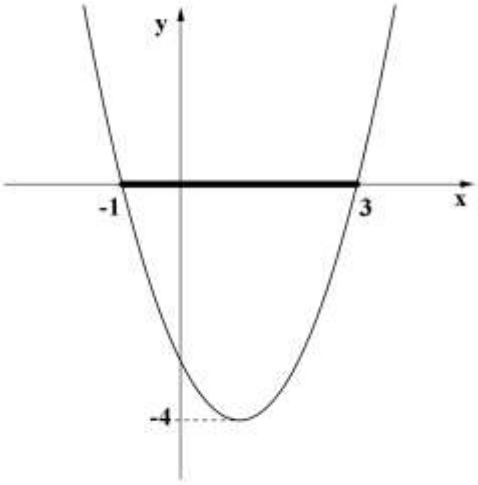
B



C

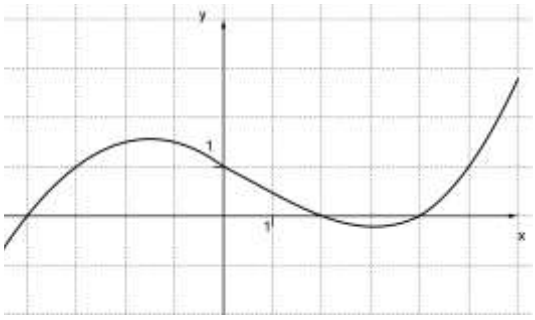


D



Domanda 8	2011	2012
Corretta	71,9%	61,5%
Errata	26,1%	27,0%
Non data	1,9%	11,5%

9. Considera il grafico della funzione $f : R \to R$ rappresentato in figura.



a) Determina $f(0)$

b) Determina per quali valori di x si ha $f(x) = 0$

c) Determina per quali valori di x si ha $f(x) > 0$

d) Determina per quali valori di x si ha $f(x) \leq 1$

Domanda 9		2011	2012
a)	Corretta	46,8%	42,9%
	Errata	15,2%	3,2%
	Non data	38,1%	54,0%
b)	Corretta	45,5%	34,9%
	Errata	18,7%	11,1%
	Non data	35,8%	54,0%
c)	Corretta	41,3%	32,1%
	Errata	26,8%	13,5%
	Non data	31,9%	54,4%
d)	Corretta	20,6%	17,5%
	Errata	36,8%	20,0%
	Non data	42,6%	57,5%

10. Un negoziante sconta della merce del 20% rispetto al prezzo di listino. Durante i saldi decide di effettuare un ulteriore sconto del 20%.

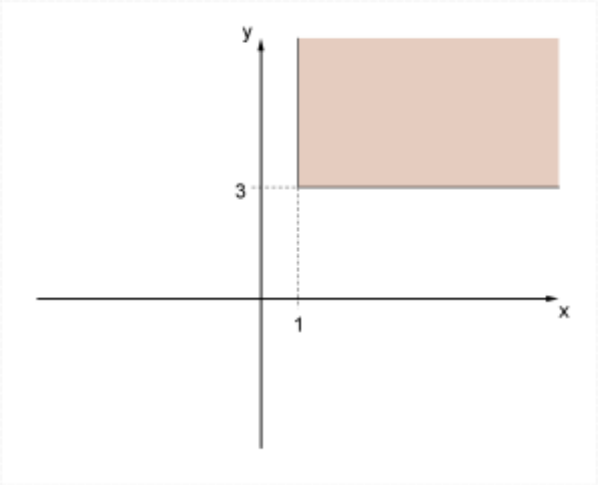
    a) Se il prezzo iniziale dell’articolo è 40 euro, qual è il suo prezzo finale?
    b) E se in generale indichiamo con P il prezzo iniziale dell’articolo, qual è il suo prezzo finale?

    A $(0{,}6)\cdot P$
    B $(0{,}4)\cdot P$
    C $(0{,}8)^2\cdot P$
    D $(0{,}2)^2\cdot P$

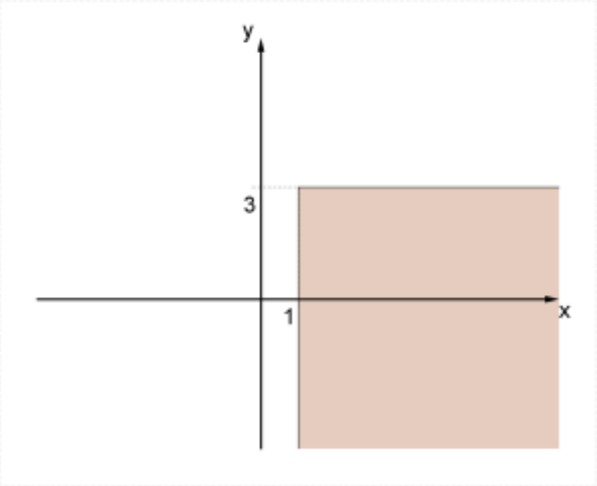
Domanda 10		2011	2012
a)	Corretta	46,5%	56,0%
	Errata	39,7%	28,2%
	Non data	13,9%	15,9%
b)	Corretta	41,9%	42,1%
	Errata	45,5%	38,5%
	Non data	12,6%	19,4%

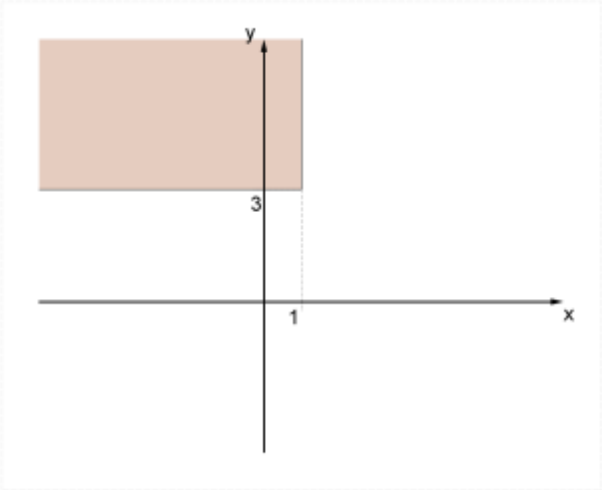
11. Uno dei disegni seguenti può essere considerato come rappresentazione grafica schematica dell'insieme $\{(x, y) \in RxR \quad t.c. \;\; x \geq 1 \text{ e } y \leq 3\}$. Quale ?

☐ A

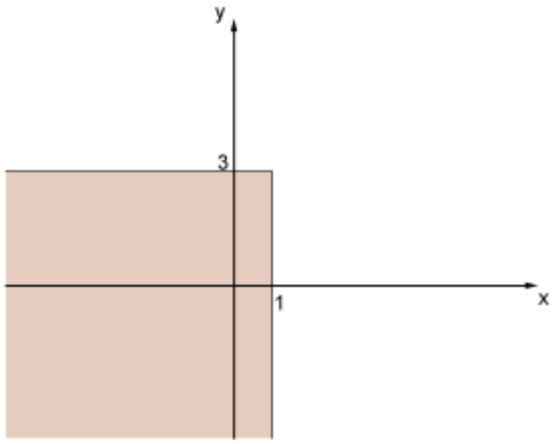


☐ B





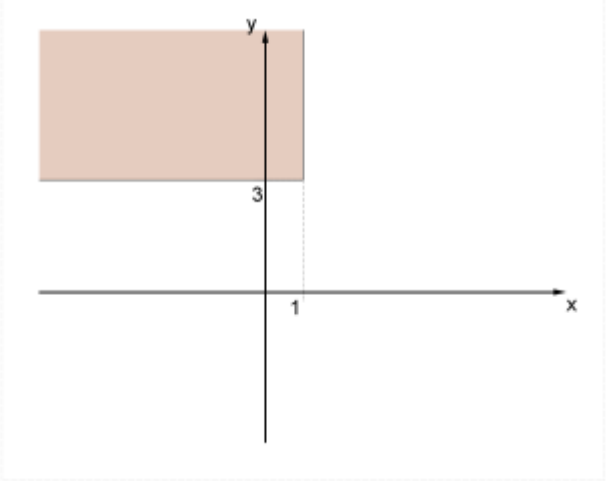
☐ C



☐ D

Domanda 11 – dal test 2011	
Corretta	**82,9%**
Errata	**13,9%**
Non data	**3,2%**

11. Considera il sottoinsieme del piano cartesiano rappresentato in figura.



Una delle seguenti è la descrizione dell’insieme rappresentato in figura. Quale?

A $\{(x,y) \in R \times R \quad t.c. \;\; x \geq 1 \text{ e } y \leq 3\}$

B $\{(x,y) \in R \times R \quad t.c. \;\; x \leq 3 \text{ e } y \leq 1\}$

C $\{(x,y) \in R \times R \quad t.c. \;\; x \leq 1 \text{ e } y \geq 3\}$

D $\{(x,y) \in R \times R \quad t.c. \;\; x \geq 3 \text{ e } y \leq 1\}$

Domanda 11 – dal test 2012	
Corretta	**73,4%**
Errata	**7,5%**
Non data	**19,0%**

Analisi delle risposte al “Test di Terza” 2012

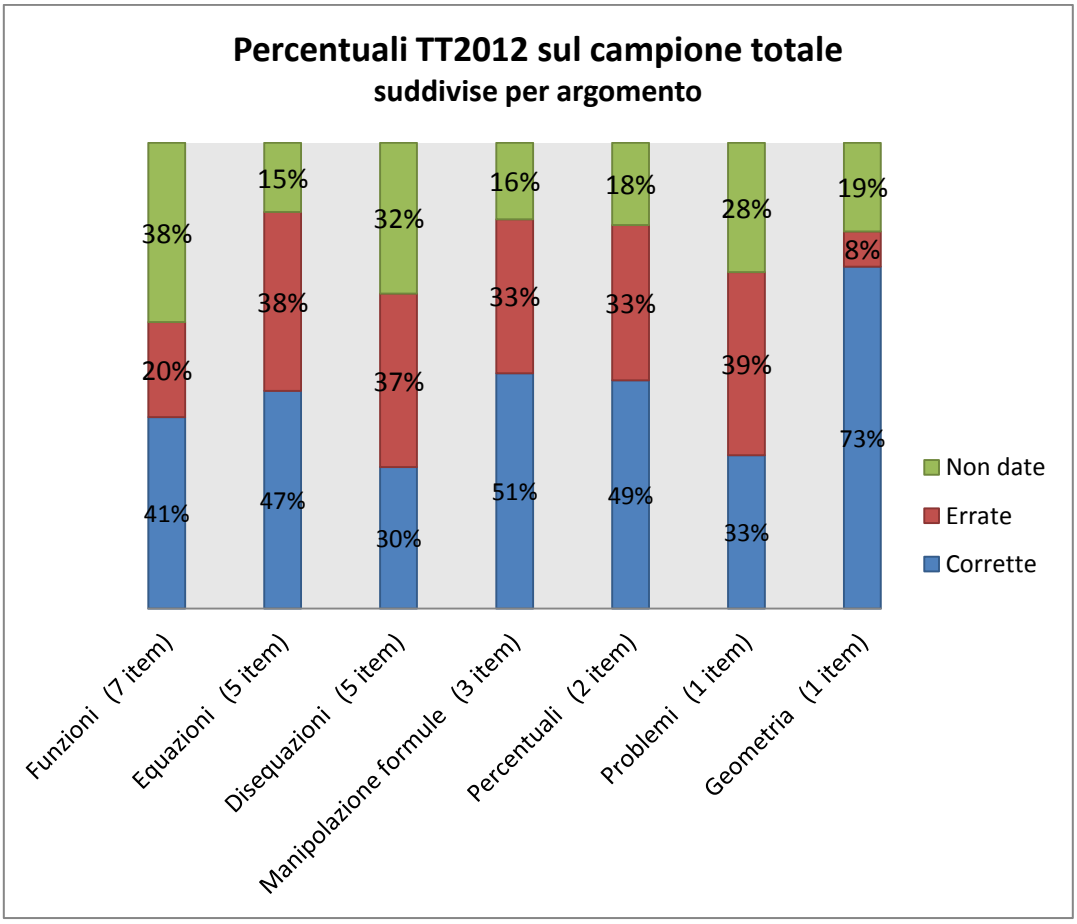
Vista l'analogia dei risultati delle verifiche nei due anni, per semplicità, si riporta una sintesi dei risultati relativa al 2011/12. Un'analisi più dettagliata delle somministrazioni relativa al biennio 2010/12 si trova nel report allegato.

Per avere un colpo d’occhio sulla difficoltà delle domande, può essere utile osservare la seguente tabella, nella quale i quesiti sono ordinati in ordine decrescente rispetto alle percentuali di risposte corrette sull’intero campione.

Item	Testo del quesito	%
D1	Indica quale delle seguenti coppie di numeri reali è soluzione del sistema di equazioni $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y=2^x \end{cases}$	79,4%
D11	Considera il sottoinsieme del piano cartesiano rappresentato in figura. Una delle seguenti è la descrizione dell’insieme rappresentato in figura. Quale?	73,4%
D6	Un quadrato ha area A. Triplicando il lato si ottiene un nuovo quadrato di area A_1. Qual è la relazione tra le due aree?	64,3%
D8	Indica in quale figura è rappresentata la parabola $y=-x^2+2x+3$ ed è evidenziato in grassetto l’insieme delle soluzioni della disequazione $-x^2+2x+3>0$.	61,5%
D7-a	Nel grafico è rappresentato il costo di una telefonata al variare del tempo Utilizzando le informazioni riportate nel grafico calcola il costo di una telefonata di 10 minuti (spiega come ottieni il risultato).	57,5%
D10-a	Un negoziante sconta della merce del 20% rispetto al prezzo di listino. Durante i saldi decide di effettuare un ulteriore sconto del 20%. Se il prezzo iniziale dell’articolo è 40 euro, qual è il suo prezzo finale?	55,9%
D3-b	$x\cdot(2x+3)=2$	55,6%
D5-a	Data la formula $F=\frac{k}{r^2}$ con r,F,k positivi. Determina il valore di *r* sapendo che $k=2$ e $F=32$.	45,2%
D3-a	$2x^2\cdot\left(x^2-1\right)=0$	42,9%
D9-a	Considera il grafico della funzione $f:R\to R$ rappresentato in figura. Determina $f(0)$	42,9%
D5-b	Trova una legge generale che permetta di determinare *r* in funzione delle variabili *F* e *k*.	42,1%
D10-b	E se in generale indichiamo con P il prezzo iniziale dell’articolo, qual è il suo prezzo finale?	42,1%
D7-b	Se una telefonata ti è costata 5 euro, quanti minuti sei stato al telefono?	41,3%
D4-d	$-\frac{3}{x}<0$	37,7%
D4-e	$(x+3)^2\le 0$	35,3%
D9-b	Considera il grafico della funzione $f:R\to R$ rappresentato in figura. Determina per quali valori di x si ha $f(x)=0$	34,9%
D2	Durante un safari un gruppo ha a disposizione una tanica contenente L litri di acqua. Dopo tre giorni sono stati consumati i 3/7della scorta; il giorno successivo si consumano altri 8 litri e a questo punto rimane 1/5 del contenuto della tanica.	32,9%

D9-c	Considera il grafico della funzione $f : R \to R$ rappresentato in figura. Determina per quali valori di x si ha $f(x) > 0$	32,1%
D4-b	$-x^2 - 25 \leq 0$	30,9%
D3-d	$x^4 - 4 = 0$	29,8%
D4-c	$6x \leq 9x^2$	26,9%
D3-c	$\frac{x-2}{x-1} = \frac{2x-3}{x-1} + 2$	26,2%
D4-a	$\frac{2x}{1-x} \geq 3$	21,0%
D9-d	Considera il grafico della funzione $f : R \to R$ rappresentato in figura. Determina per quali valori di x si ha $f(x) \leq 1$	17,5%

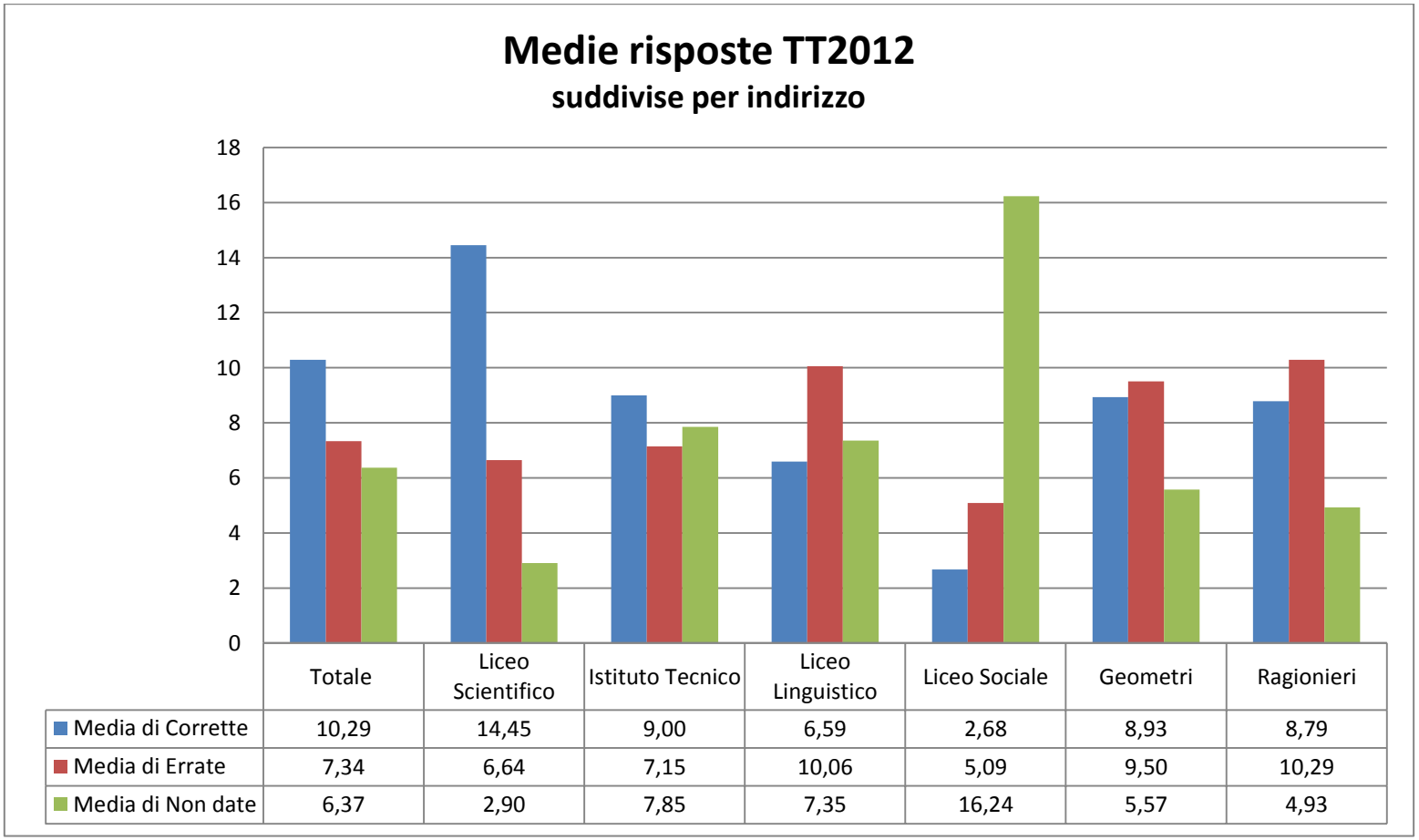
Raggruppando i quesiti in base all’argomento (come indicato nel report allegato), si ottiene il grafico seguente nel quale le percentuali sono riferite all’intero campione



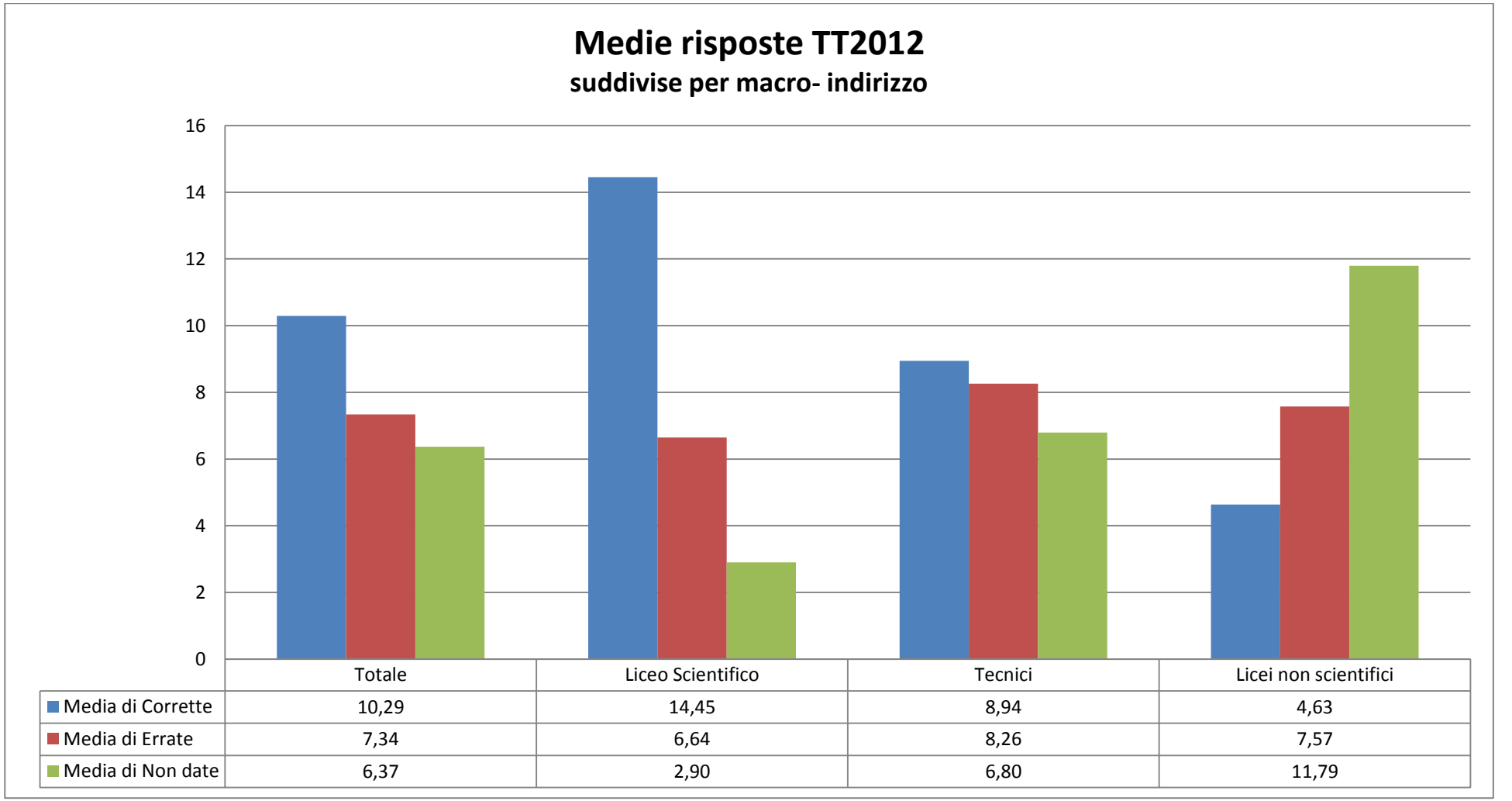
Nei seguenti grafici vengono rappresentate le medie delle risposte corrette, errate, non date suddivise per indirizzo[37] e per macro-indirizzo[38]. Inoltre, si considera il test costituito da 24 item e si assegna punteggio 1 per la risposta corretta e 0 negli altri casi.

[37] Le categorie “Indirizzo” sono ordinate da sinistra verso destra in base alla numerosità.

[38] Le categorie “macro-Indirizzo” sono ordinate da sinistra verso destra in base alla numerosità.



	Totale	Liceo Scientifico	Istituto Tecnico	Liceo Linguistico	Liceo Sociale	Geometri	Ragionieri
Media di Corrette	10,29	14,45	9,00	6,59	2,68	8,93	8,79
Media di Errate	7,34	6,64	7,15	10,06	5,09	9,50	10,29
Media di Non date	6,37	2,90	7,85	7,35	16,24	5,57	4,93



	Totale	Liceo Scientifico	Tecnici	Licei non scientifici
Media di Corrette	10,29	14,45	8,94	4,63
Media di Errate	7,34	6,64	8,26	7,57
Media di Non date	6,37	2,90	6,80	11,79

“Test di Quarta” - Quesiti e analisi domande

2010/2011 e 2011/2012

1. Indica quale delle seguenti coppie di numeri reali è soluzione del sistema di equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = 2^x \end{cases}$$

A $(-1,-2)$ **B** $(2,1)$ **C** $(1,2)$ **D** $(-2,-1)$

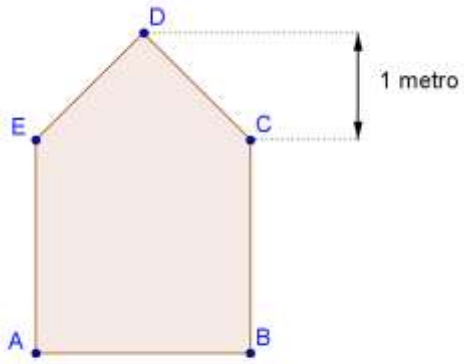
Domanda 1	2011	2012
Corretta	79,7%	83,4%
Errata	18,4%	13,5%
Non data	1,9%	3,1%

2. **Scrivi un’equazione o una disequazione** che esprima la situazione descritta nel seguente problema.

   Supponiamo che alcune ninfee si sviluppino per un certo periodo, raddoppiando ogni giorno l'area della superficie di acqua su cui si estendono. Il primo giorno occupano una superficie di 2 dm2. In quale intervallo di tempo (espresso in giorni) la superficie occupata dalle ninfee rimane inferiore a 200 dm2 ?

Domanda 2 – test 2011	
Corretta	18,0%
Errata	41,8%
Non data	40,2%

2. Si deve produrre uno specchio per una fiera del turismo che abbia la forma in figura con ABCE quadrato e ECD triangolo isoscele di altezza 1 metro.



La superficie totale dello specchio deve essere minore o uguale di 5 m^2. **Scrivi una disequazione** che permetta di individuare in quale intervallo deve variare la lunghezza del lato del quadrato.

Domanda 2 – test 2012	
Corretta	**32,3%**
Errata	**29,1%**
Non data	**38,6%**

3. Risolvi le seguenti equazioni indicando nella terza colonna della tabella l’insieme delle soluzioni[39] e **motivando** la risposta.

Equazione	
a	$2x^3 \cdot \left(x^4 - 1\right) = 0$
b	$\sqrt{x+1} = \frac{3}{4}$
c	$2^{x+1} = 0{,}5$
d	$4^x + 16 = 0$

Domanda 3		2011	2012
a)	Corretta	41,8%	39,5%
	Errata	37,5%	30,9%
	Non data	20,7%	29,6%
b)	Corretta	55,1%	51,6%
	Errata	22,7%	23,3%
	Non data	22,3%	25,1%
c)	Corretta	53,5%	54,7%
	Errata	18,8%	16,6%
	Non data	27,7%	28,7%
d)	Corretta	42,2%	43,9%
	Errata	38,7%	38,1%
	Non data	19,1%	17,9%

[39] Per insieme delle soluzioni di un’equazione o di una disequazione si intende l’insieme dei numeri che sostituiti alla variabile x rendono vera la relazione (l’equazione o la disequazione)

4. Risolvi le seguenti disequazioni indicando l’insieme delle soluzioni e motivando la risposta

a) $-x^4-9\le 0$
b) $2^x(x-3)\ge 0$

Domanda 4		2011	2012
a)	Corretta	37,1%	43,5%
	Errata	34,4%	29,1%
	Non data	28,5%	27,4%
b)	Corretta	39,8%	43,9%
	Errata	20,7%	19,3%
	Non data	39,5%	36,8%

5. Indica l’insieme delle soluzioni della disequazione

$$|x|<2x+3$$

A $-1<x<0$

B $x<-1$

C $x>-1$

D $x>0$

Domanda 5	2011	2012
Corretta	47,3%	47,1%
Errata	37,1%	38,6%
Non data	15,6%	14,3%

6. Sia $a<0$; per quali valori di *x* si ha $\frac{a}{2-x}>0$?

A $x>2$

B $x<2$

C $x\neq 2$

D Dipende dal valore di *a*.

Domanda 6	2011	2012
Corretta	**60,9%**	**55,6%**
Errata	**37,9%**	**41,3%**
Non data	**1,2%**	**3,1%**

Lo stesso quesito è stato somministrato nel test di verifica delle conoscenze in ingresso ai corsi di laurea scientifici nella sessione di settembre 2008, con i seguenti esiti:

% risposte esatte	53,2%
Totale studenti	13.312

7. Se $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$ con p, q, f diversi da *0*, allora p è uguale a

☐ $\frac{fq}{q-f}$ ☐ $f-q$ ☐ $\frac{1}{f}-\frac{1}{q}$ ☐ $\frac{f}{q}$

Domanda 7	2011	2012
Corretta	**26,2%**	**35,4%**
Errata	**70,3%**	**56,1%**
Non data	**3,5%**	**8,5%**

Lo stesso quesito è stato somministrato nel test di verifica delle conoscenze in ingresso ai corsi di laurea scientifici nella sessione di settembre 2008, con i seguenti esiti:

% risposte esatte	43,6%
Totale studenti	13.312

8. Sia data la funzione $f(x)=4x^3-11x^2-8x+15$. Sapendo che nell'intervallo $(1,3)$ la funzione non cambia il suo segno, determina il segno di f in questo intervallo.

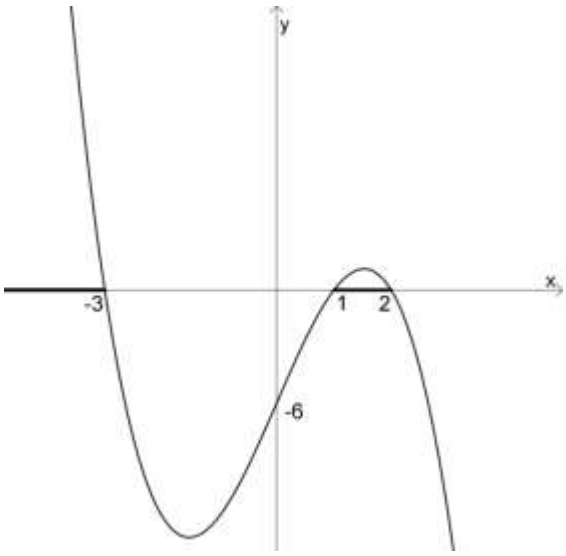
Domanda 8	2011	2012
Corretta	34,4%	34,1%
Errata	14,8%	13,5%
Non data	50,8%	52,5%

9. Sia dato il polinomio $P(x)=x^2+ax+b$. Sappiamo che -1 e 2 sono le soluzioni di $P(x)=0$. Trova il valore $P(7)$, motivando opportunamente la risposta.

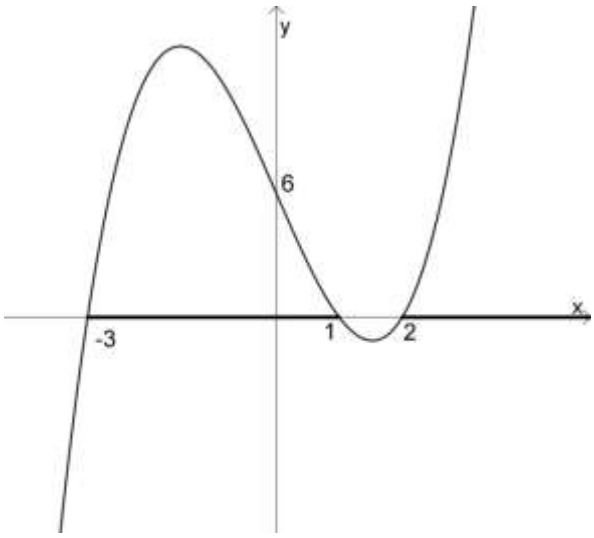
Domanda 9	2011	2012
Corretta	19,5%	12,1%
Errata	17,6%	19,7%
Non data	62,9%	68,2%

10. Indica in quale figura è rappresentato il grafico della funzione $y=-x^3+7x-6$ ed è evidenziato in grassetto l’insieme delle soluzioni della disequazione $-x^3+7x-6>0$.

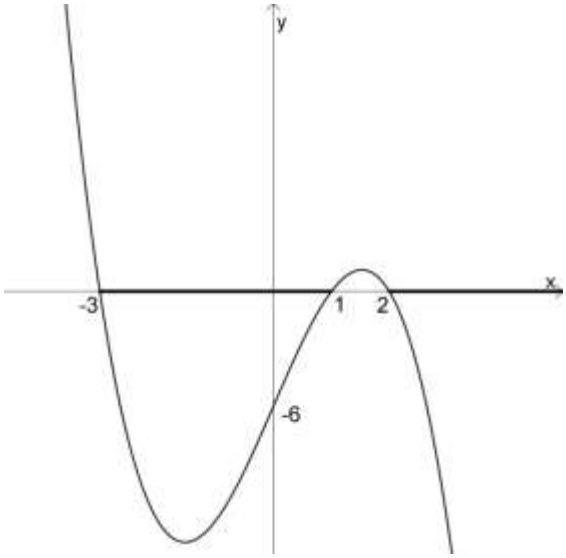
A



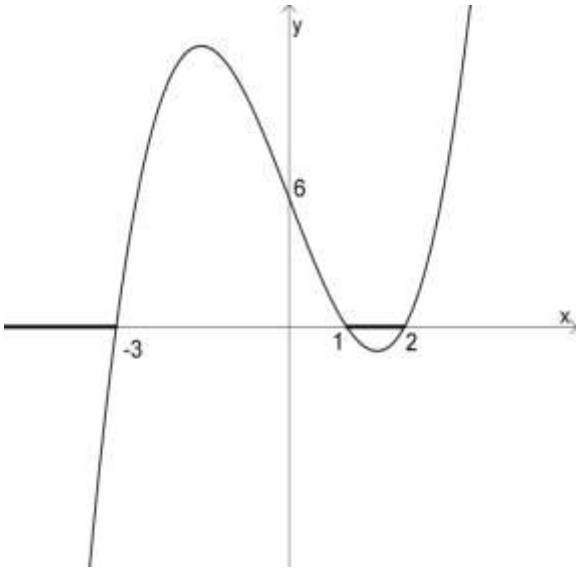
B



C

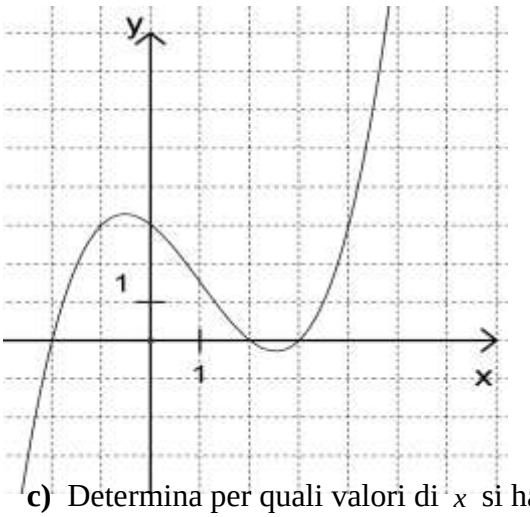


D



Domanda 10	2011	2012
Corretta	**66,0%**	**61,4%**
Errata	**25,8%**	**32,7%**
Non data	**8,2%**	**5,8%**

11. Considera il grafico della funzione $f : R \to R$ rappresentato in figura.



a) Determina $f(0)$

b) Determina per quali valori di x si ha $f(x) = 0$

c) Determina per quali valori di x si ha $f(x) > 3$

d) Determina per quali valori di x si ha $f(x) \geq -3x + 3$

Domanda 11		2011	2012
a)	Corretta	57,4%	51,6%
	Errata	16,4%	13,9%
	Non data	26,2%	34,5%
b)	Corretta	28,9%	52,5%
	Errata	41,4%	17,9%
	Non data	29,7%	29,6%
c)	Corretta	51,6%	35,4%
	Errata	24,2%	33,6%
	Non data	24,2%	30,9%
d)	Corretta	28,9%	52,5%
	Errata	41,4%	17,9%
	Non data	29,7%	29,6%

12. Il numero di individui di una popolazione è aumentato in un anno del 27%. Se *P* era il numero all’inizio dell’anno, qual è il numero alla fine dell’anno?

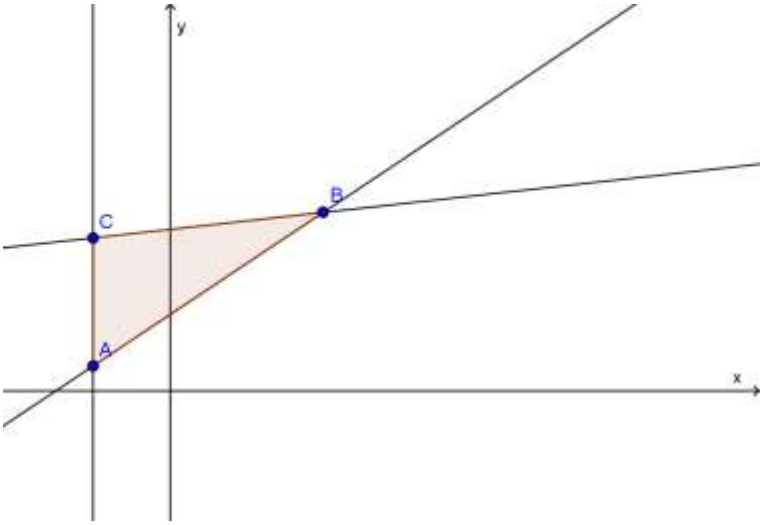
A $P \cdot 0{,}27$ **B** $P + 1{,}27$ **C** $P + 0{,}27$ **D** $P / 0{,}27$ **E** $P \cdot 1{,}27$

Domanda 12	2011	2012
Corretta	**37,1%**	**43,9%**
Errata	**59,4%**	**50,2%**
Non data	**3,5%**	**5,8%**

Lo stesso quesito è stato somministrato nel test di ammissione ai corsi di laurea scientifici a numero programmato di settembre 2010, con i seguenti esiti:

opzioni di risposta	percentuali
risposta A	28%
risposta B	4%
risposta C	41,1%
risposta D	4,9%
risposta E (corretta)	18,7%
non data	3,2%
totale studenti	**7178**

13. I punti $A(-3,1)$, $B(6,7)$ e $C(-3,6)$ sono i vertici del triangolo ombreggiato in figura.



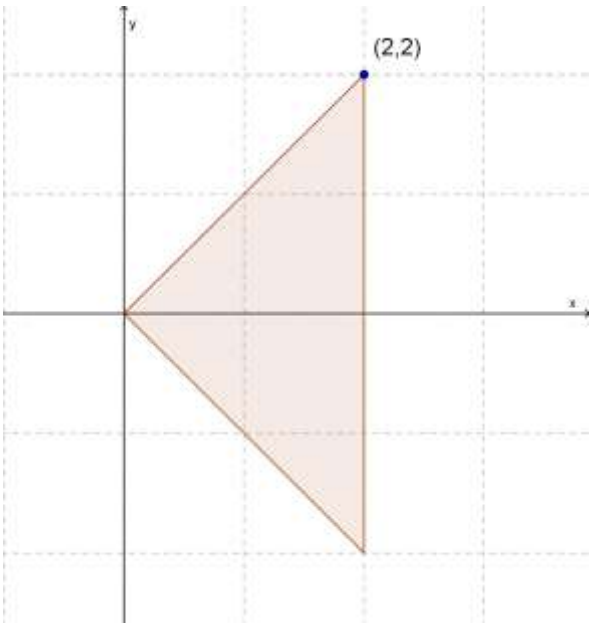
Qual è l’area di tale triangolo?

Domanda 13 nel test 2012 Domanda 14 nel test 2011	2011	2012
Corretta	**26,6%**	**22,0%**
Errata	**26,2%**	**25,6%**
Non data	**47,3%**	**52,5%**

Lo stesso quesito è stato somministrato nel test di verifica delle conoscenze in ingresso ai corsi di laurea scientifici nella sessione di settembre 2010, con i seguenti esiti:

% risposte esatte	43,2%
Totale studenti	7.178

14. Una sola delle seguenti condizioni è vera per ogni punto (x, y) del triangolo evidenziato in figura.



Quale?

A $x \leq 1$

B $y \geq 0$

C $y \geq x$

D $y \geq -x$

Domanda 14 test 2012 Domanda 15 test 2011	2011	2012
Corretta	**52,0%**	**53,1%**
Errata	**38,1%**	**40,6%**
Non data	**9,9%**	**6,3%**

Lo stesso quesito è stato somministrato nel test di verifica delle conoscenze in ingresso ai corsi di laurea scientifici nella sessione di settembre 2008, con i seguenti esiti:

% risposte esatte	51,9%
Totale studenti	13.312

15. Un barattolo di pelati di forma cilindrica da 0,4 Kg è alto 11 cm e ha la base di 6 cm di diametro. Qual è il volume del barattolo?

A Circa 100 cm^3

B Circa 200 cm^3

C Circa 300 cm^3

D Circa 400 cm^3

Domanda 15 nel test 2012 Domanda 13 nel test 2011	2011	2012
Corretta	**46,1%**	**51,6%**
Errata	**42,2%**	**36,8%**
Non data	**11,7%**	**11,7%**

Lo stesso quesito è stato somministrato nella prova Invalsi dell’esame di stato del primo ciclo nell’anno scolastico 2009/10, con i seguenti esiti:

opzioni di risposta	percentuali
A	27,3%
B	17,5%
C (corretta)	**42,6%**
D	9,1%

Analisi delle risposte al "Test di Quarta" 2012

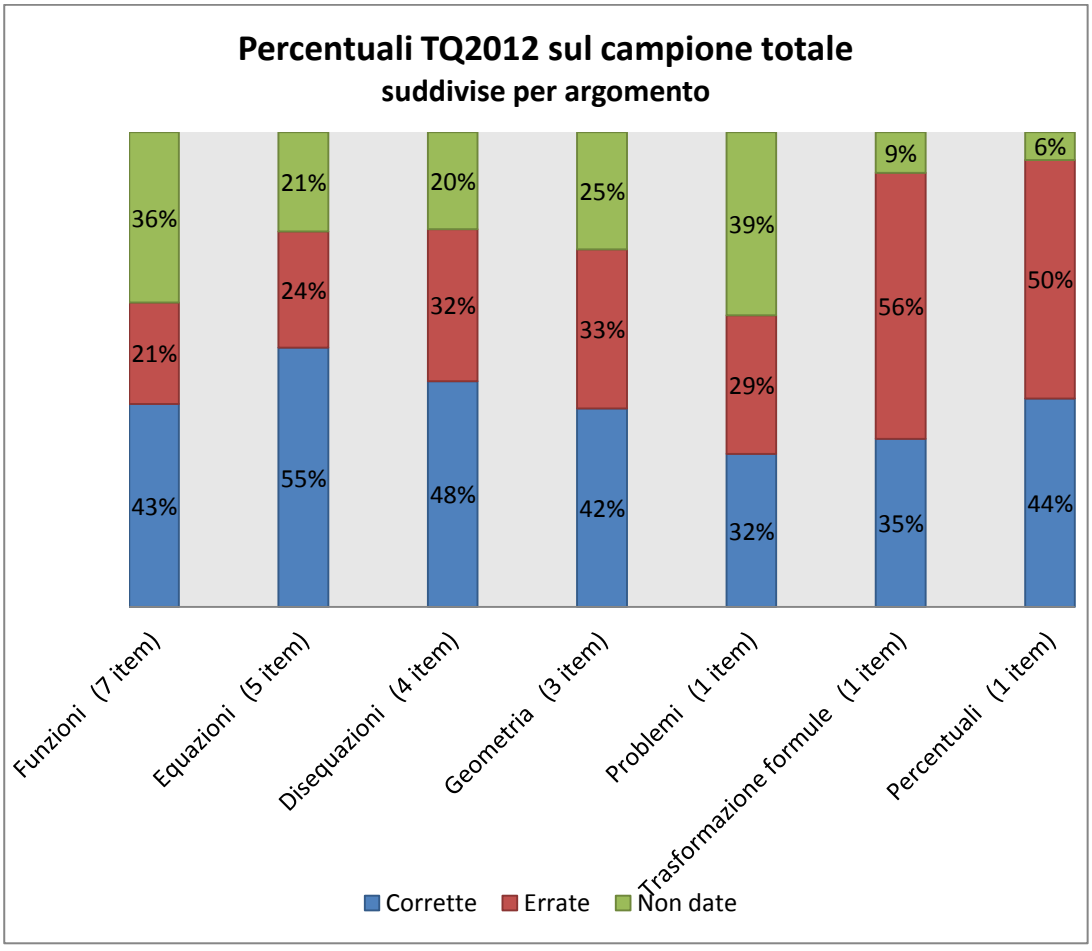
Vista l'analogia dei risultati delle verifiche nei due anni, per semplicità, si riporta una sintesi dei risultati relativa al 2011/12. Un'analisi più dettagliata delle somministrazioni relativa al biennio 2010/12 si trova nel report allegato.

Per avere un colpo d'occhio sulla difficoltà delle domande, può essere utile osservare la seguente tabella, nella quale i quesiti sono ordinati in ordine decrescente rispetto alle percentuali di risposte corrette sull'intero campione.

Item	Testo del quesito	%
D1	Indica quale delle seguenti coppie di numeri reali è soluzione del sistema di equazioni $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ y=2^x \end{cases}$	**83,4%**
D10	Indica in quale figura è rappresentato il grafico della funzione $y=-x^3+7x-6$ ed è evidenziato in grassetto l'insieme delle soluzioni della disequazione $-x^3+7x-6>0$	**61,4%**
D6	Sia $a<0$; per quali valori di *x* si ha $\frac{a}{2-x}>0$?	**55,6%**
D3-c	$2^{x+1}=0{,}5$	**54,7%**
D11-b	Considera il grafico della funzione $f:R\to R$ rappresentato in figura. Determina per quali valori di x si ha $f(x)=0$	**52,5%**
D11-d	Considera il grafico della funzione $f:R\to R$ rappresentato in figura. Determina per quali valori di x si ha $f(x)\geq -3x+3$	**52,5%**
D14	Una sola delle seguenti condizioni è vera per ogni punto (x,y) del triangolo evidenziato in figura.	**52,0%**
D3-b	$\sqrt{x+1}=\frac{3}{4}$	**51,6%**
D11-a	Considera il grafico della funzione $f:R\to R$ rappresentato in figura. Determina $f(0)$	**51,6%**
D15	Un barattolo di pelati di forma cilindrica da 0,4 Kg è alto 11 cm e ha la base di 6 cm di diametro. Qual è il volume del barattolo?	**51,6%**
D5	Indica l'insieme delle soluzioni della disequazione $\lvert x\rvert<2x+3$	**47,1%**
D3-d	$4^x+16=0$	**43,9%**
D4-b	$2^x(x-3)\geq 0$	**43,9%**
D12	Il numero di individui di una popolazione è aumentato in un anno del 27%. Se *P* era il numero all'inizio dell'anno, qual è il numero alla fine dell'anno?	**43,9%**
D4-a	$-x^4-9\leq 0$	**43,5%**
D3-a	$2x^3\cdot(x^4-1)=0$	**39,5%**
D7	Se $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$ con p,q,f diversi da *0*, allora p è uguale a	**35,4%**
D11-c	Considera il grafico della funzione $f:R\to R$ rappresentato in figura. Determina per quali valori di x si ha $f(x)>3$	**35,4%**
D8	Sia data la funzione $f(x)=4x^3-11x^2-8x+15$. Sapendo che nell'intervallo $(1,3)$ la funzione non	**34,1%**

	cambia il suo segno, determina il segno di f in questo intervallo.	
D2	Si deve produrre uno specchio per una fiera del turismo che abbia la forma in figura con ABCE quadrato e ECD triangolo isoscele di altezza 1 metro. La superficie totale dello specchio deve essere minore o uguale di 5 m^2. Scrivere una disequazione che permetta di individuare in quale intervallo deve variare la lunghezza del lato del quadrato.	**32,3%**
D13	I punti $A(-3,1)$, $B(6,7)$ e $C(-3,6)$ sono i vertici del triangolo ombreggiato in figura. Qual è l'area di tale triangolo?	**22,0%**
D9	Sia dato il polinomio $P(x)=x^2+ax+b$. Sappiamo che -1 e 2 sono le soluzioni di $P(x)=0$. Trova il valore $P(7)$, motivando opportunamente la risposta.	**12,1%**

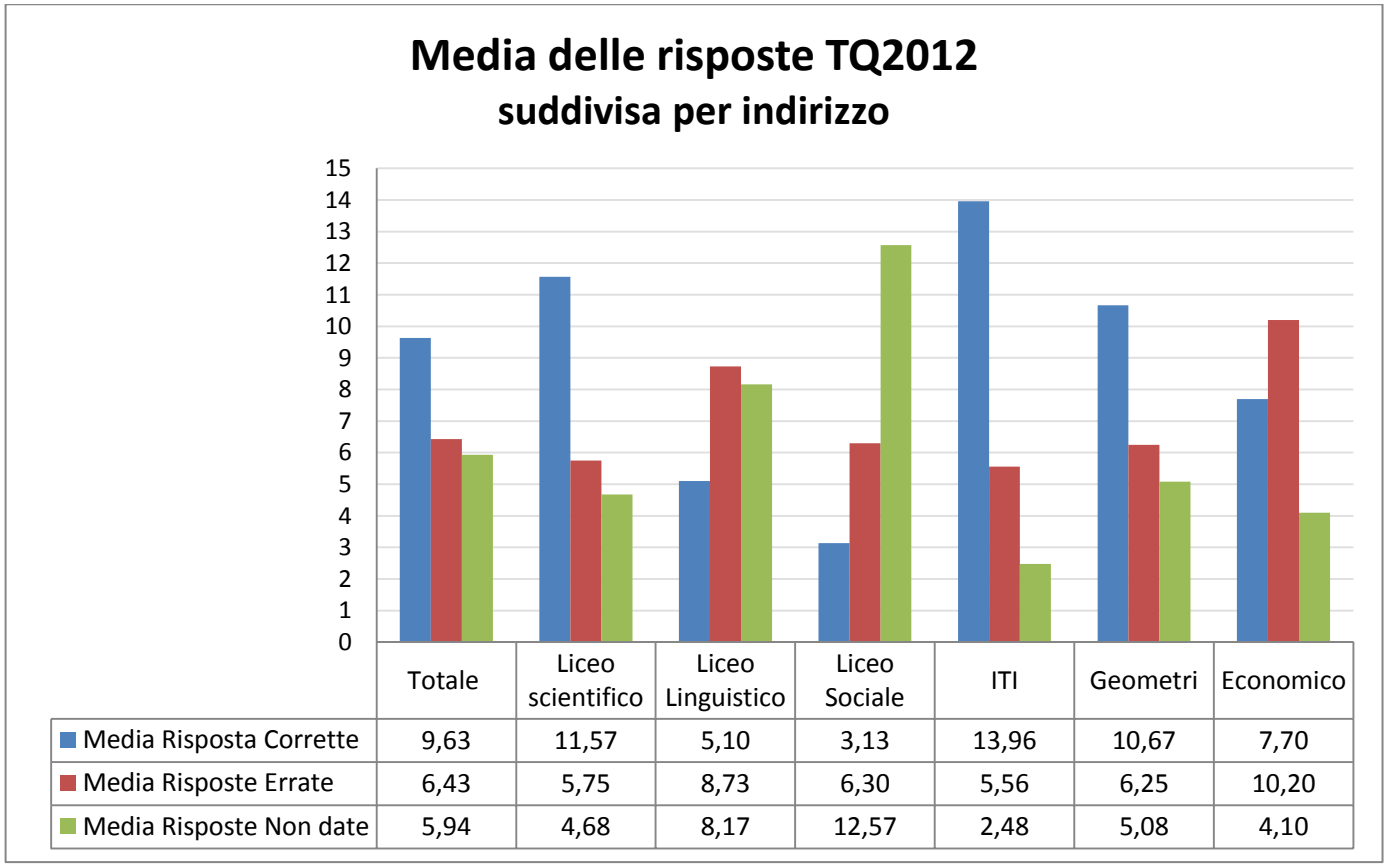
Raggruppando i quesiti in base all'argomento (come indicato nel report allegato), si ottiene il grafico seguente nel quale le percentuali sono riferite all'intero campione



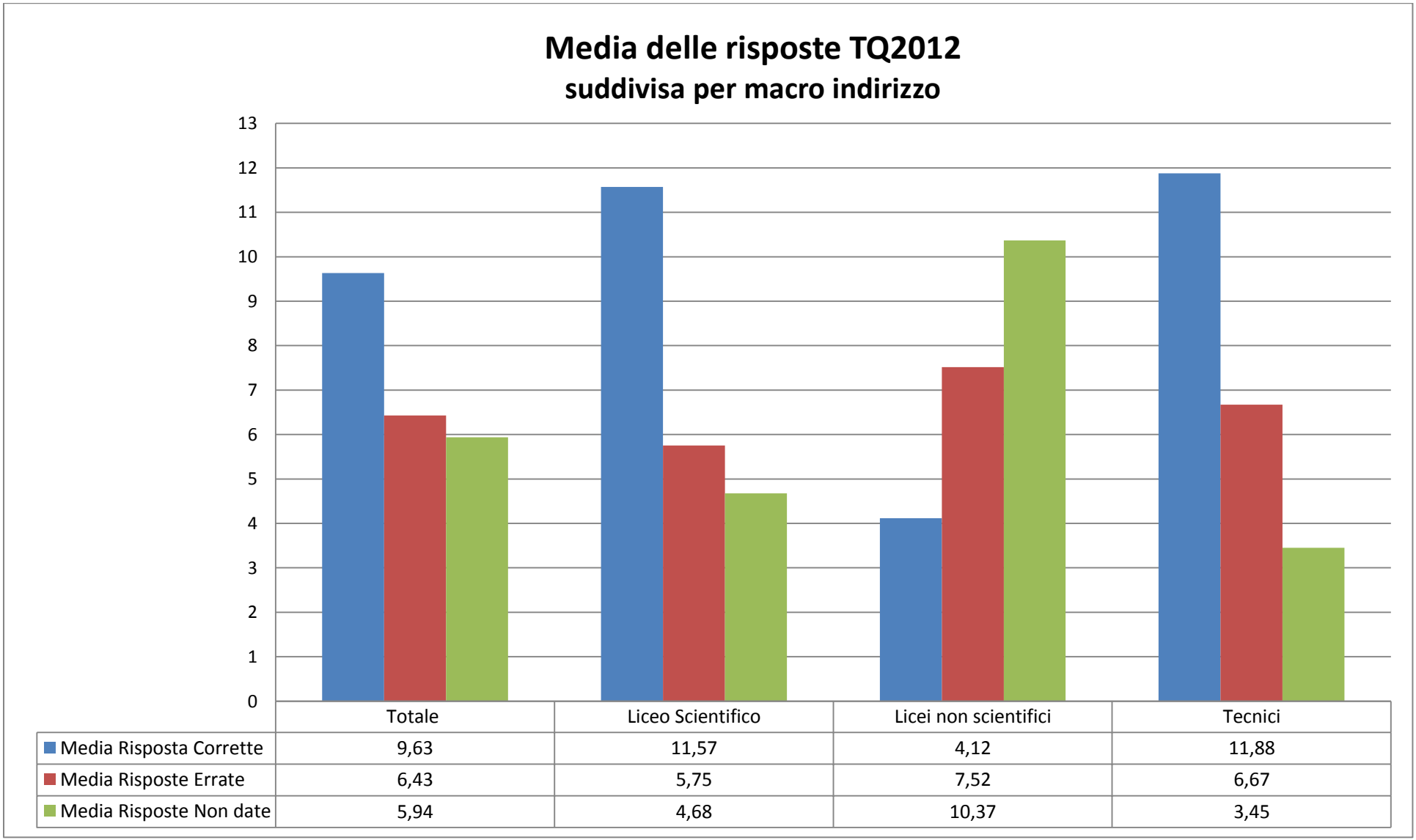
Nei seguenti grafici vengono rappresentate le medie delle risposte corrette, errate, non date suddivise per indirizzo[40] e per macro-indirizzo[41]. Inoltre, si considera il test costituito da 22 item e si assegna punteggio 1 per la risposta corretta e 0 negli altri casi.

[40] Le categorie "Indirizzo" sono ordinate da sinistra verso destra in base alla numerosità.

[41] Le categorie "macro-Indirizzo" sono ordinate da sinistra verso destra in base alla numerosità.



	Totale	Liceo scientifico	Liceo Linguistico	Liceo Sociale	ITI	Geometri	Economico
Media Risposta Corrette	9,63	11,57	5,10	3,13	13,96	10,67	7,70
Media Risposte Errate	6,43	5,75	8,73	6,30	5,56	6,25	10,20
Media Risposte Non date	5,94	4,68	8,17	12,57	2,48	5,08	4,10



	Totale	Liceo Scientifico	Licei non scientifici	Tecnici
Media Risposta Corrette	9,63	11,57	4,12	11,88
Media Risposte Errate	6,43	5,75	7,52	6,67
Media Risposte Non date	5,94	4,68	10,37	3,45

Esempi di analisi degli errori

Per cercare di capire i ragionamenti fatti dagli studenti nel rispondere ai quesiti del test, durante l'anno scolastico si è deciso di somministrare solamente alcuni item e discuterli dettagliatamente in classe.
Qui sotto si riporta la scheda utilizzata dai docenti per documentare l'analisi di questi item.

Docente	
Istituto / Sede	

Scheda domanda del docente

domanda	Test Terza □ Test Quarta □	Numero:
Classi / indirizzo		

Periodo attività
Tempo dedicato in classe
Argomento trattato in quel periodo
La domanda è stata somministrata: da sola □ insieme ad altre □

Si allegano num._____ protocolli degli studenti selezionati per la loro significatività.

Riflessioni relative alla discussione con gli studenti.

- Livello di difficoltà stimato
- Strategie risolutive utilizzate
- Errori ricorrenti e possibili interpretazioni

A titolo esemplificativo si riportano i risultati di questo lavoro svolto con alcuni studenti di una quarta ITI e alcuni studenti di una quarta linguistico. Si analizzano i quesiti 4, 9, 10 del test di terza che agli studenti dell'ITI sono stati somministrati in un unico momento, mentre agli studenti del linguistico in periodi diversi dell'anno scolastico.

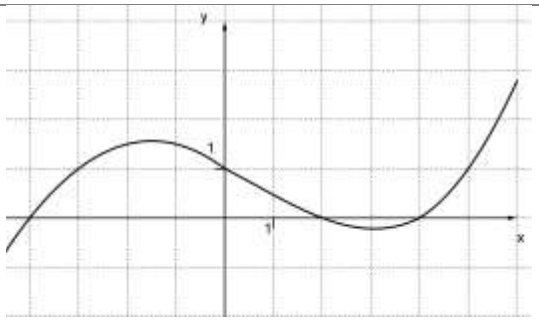
Quesito 4 Risolvi le seguenti disequazioni indicando l'insieme delle soluzioni e **motivando** la risposta

	Disequazione
a	$\frac{2x}{1-x} \geq 3$
b	$-x^2 - 9 \leq 0$
c	$6x \leq 9x^2$
d	$-\frac{2}{x} < 0$

Tutti gli studenti considerano il quesito facile; tuttavia si riscontrano alcuni errori:

- $x^2 + 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3$ o $x^2 + 9 \geq 0 \rightarrow x \geq \pm 3$
- Confondere > con ≥ . Errore giustificato dagli studenti come errore di distrazione e giudicato da essi errore non grave ("ho solo dimenticato un punto")
- Risolvere una disequazione fratta come se fosse un sistema di disequazioni
- Nel determinare l'insieme delle soluzioni di una disequazione fratta eliminare il denominatore senza studiarne il segno
- Dividere $6x \leq 9x^2$ per x e risolvere la disequazione di I grado

Quesito 9

Considera il grafico della funzione $f : R \to R$ rappresentato in figura.	
a) Determina $f(0)$	c) Determina per quali valori di x si ha $f(x) > 0$
b) Determina per quali valori di x si ha $f(x) = 0$	d) Determina per quali valori di x si ha $f(x) \leq 1$

Gli studenti dell'ITI considerano facile il quesito, mentre per quelli del linguistico il livello di difficoltà è medio (alcuni giudicano il quesito facile o molto facile mentre altri difficile).
Un errore comune e già segnalato nel quesito precedente è confondere > con ≥ , anche in questo caso giustificato degli studenti come errore di distrazione. Inoltre tra gli studenti del linguistico si rileva confusione tra ascissa e ordinata, nonché tra $f(x) = 0$ e $f(0)$.

Quesito 10

a	Un negoziante sconta della merce del 20% rispetto al prezzo di listino. Durante i saldi decide di effettuare un ulteriore sconto del 20%. Se il prezzo iniziale dell'articolo è 40 euro, qual è il suo prezzo finale?
b	E se in generale indichiamo con *P* il prezzo iniziale dell'articolo, qual è il suo prezzo finale? ☐ $(0,6) \cdot P$ ☐ $(0,4) \cdot P$ ☐ $(0,8)^2 \cdot P$ ☐ $(0,2)^2 \cdot P$

La maggior parte degli studenti dell'ITI considera il quesito facile, anche se segnala difficoltà di interpretazione del testo ("ulteriore sconto"). Questo problema porta alcuni studenti (anche del linguistico) a sommare i due sconti ovvero ad applicare il 40% al prezzo iniziale. Gli studenti del linguistico considerano abbastanza facile la prima parte del quesito (punto a), mentre considerano difficile la richiesta b.

Simulazione della verifica delle conoscenze per l'ingresso ai corsi di laurea

L'azione trasversale "autovalutazione e verifiche" del Piano Nazionale Lauree Scientifiche prevede di offrire agli studenti degli ultimi anni della scuola secondaria di secondo grado la possibilità di affrontare una simulazione della verifica di accesso ai corsi di laurea scientifici, sviluppando su di essa un'adeguata riflessione. Nell'anno 2011/12 il progetto nazionale Lauree Scientifiche ha realizzato quest'attività, come progetto pilota, con il progetto locale di Trento, avendo questa sede una notevole esperienza pregressa grazie al progetto Orientamat.

Dato che il progetto ha focalizzato l'attenzione sullo sviluppo delle conoscenze e competenze di base, oggetto anche delle verifiche in ingresso ai corsi di laurea scientifici, e vista la collaborazione con il progetto Lauree Scientifiche, si è ritenuto opportuno offrire agli insegnanti coinvolti la possibilità di partecipare a questa sperimentazione pilota.

La "simulazione della verifica" riproduce integralmente il contesto della prova, dalla registrazione, alla somministrazione online e ai report dei risultati. Un aspetto importante dell'attività consiste nella discussione della verifica fatta dagli insegnanti con il coinvolgimento attivo degli studenti che possono autovalutare le proprie capacità e sviluppare una riflessione sui punti deboli della loro preparazione. La simulazione, composta da quesiti pubblici non largamente diffusi, è volta a fornire un'indicazione sulla preparazione matematica di base complessiva dello studente, richiesta per tutti i corsi di laurea scientifici. Gli studenti, con l'aiuto degli insegnanti, oltre a confrontarsi con le richieste di base relative alla matematica, possono autovalutare la capacità di utilizzare queste conoscenze in modo flessibile e con padronanza. Per raggiungere questi obiettivi è fondamentale il ruolo di mediatore dell'insegnante nel coinvolgere attivamente gli studenti nella discussione e analisi dei quesiti, anche in relazione alle difficoltà riscontrate, e nella conseguente riflessione sui punti deboli della preparazione.

Alla sperimentazione hanno aderito 10 Istituti Scolastici, di cui 9 della Provincia di Trento con un totale di 379 studenti di classe quarta e quinta provenienti per il 67% da licei scientifici. Alla sperimentazione hanno partecipato anche gli Istituti coinvolti in questo progetto. Alcuni istituti hanno previsto la partecipazione di intere classi, altri di gruppi di studenti provenienti da classi diverse che hanno aderito su base volontaria. L'esperienza è stata molto apprezzata dagli studenti perché ha permesso loro di sperimentare la capacità di gestire domande attinenti a più argomenti appresi in momenti diversi, di tenere la concentrazione e di controllare i propri processi. Gli insegnanti, d'altra parte, hanno condiviso il precedente giudizio, enfatizzando anche l'utilità di avere uno strumento per l'autovalutazione degli studenti oggettivo ed esterno alla scuola. Partecipazione degli Istituti coinvolti nel progetto qui documentato.

I.T.T POZZO - TRENTO[42]	17
I.I. CURIE - PERGINE	7
I.I. FLORIANI – RIVA DEL GARDA	81
LICEO DA VINCI - TRENTO	121
LICEO RUSSELL - CLES	20
TOTALE	**246**

[42] L'ITT "Pozzo" è stato coinvolto in questa sperimentazione in quanto la prof.ssa Francesca Mazzini nel secondo anno del progetto ha preso servizio presso questo Istituto.